
Proposta de cálculo de integrais indefinidas de funções racionais e irracionais no processo de ensino-aprendizagem

Proposal for calculating indefinite integrals of rational and irrational functions in the teaching-learning process

Proposition de calcul des intégrales indéfinies de fonctions rationnelles et irrationnelles dans le processus d'enseignement-apprentissage

Simão Celina Simão¹

Instituto Superior Universitário Nimi Ya Lukeni, Angola
celinasimaomath@gmail.com

Resumo

Esse artigo buscou analisar as dificuldades que os alunos da 12^a classe da escola do Magistério do Soyo da opção Matemática e Física enfrentam no cálculo de integrais indefinidas de funções racionais e irracionais e tem como finalidade, propor actividades ilustrativas para o cálculo de integrais indefinidas de funções racionais e irracionais no processo de ensino-aprendizagem que contribuam para o desenvolvimento de habilidades de cálculo. Numa abordagem qualitativa e quantitativa, o questionário aplicado aos alunos permitiu determinar que, 68% dos alunos apresentam deficiências no cálculo de exercícios relacionados as integrais indefinidas, afectando o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. A entrevista aos professores reflecte insuficiências metodológicas que são causas dos problemas dos alunos. Nas considerações finais, ressaltaram-se as análises obtidas por meio da pesquisa de campo e os diversos conflitos e tensões apresentados pelos sujeitos da pesquisa. Como resultado final obteve-se uma proposta de actividades ilustrativas de cálculo de integrais indefinidas de funções racionais e irracionais, com um enfoque teórico-prático, onde o aluno deve transitar por vários níveis de conhecimento que vai do nível teórico até ao nível prático.

Palavras-chave: Processo de ensino-aprendizagem; Integrais Indefinidas.

Abstract

This article sought to analyze the difficulties faced by 12th-grade students at the Soyo Teacher Training School (Magistério do Soyo), majoring in Mathematics and Physics, regarding the calculation of indefinite integrals of rational and irrational functions. Its purpose is to propose illustrative activities for calculating indefinite integrals of rational and irrational functions within the teaching-learning process, contributing to the development of calculation skills. Using a qualitative and quantitative approach, a questionnaire applied to students revealed that 68% of them show deficiencies in solving exercises related to indefinite integrals, affecting the Mathematics teaching-learning process. Interviews with teachers reflected methodological

¹ Mestre em Didáctica de Matemática. Docente do Departamento de Engenharia Informática e Multimédia

insuficiências que contribuem para os problemas dos alunos. Na análise obtida através da pesquisa de campo e dos vários conflitos e tensões apresentados pelos sujeitos da pesquisa foram destacados. O resultado final é uma proposta de atividades ilustrativas para o cálculo de integrais indefinidas de funções racionais e irracionais com um enfoque teórico-prático, onde o aluno progride através de vários níveis de conhecimento, do teórico ao prático.

Keywords: Teaching-learning process; Indefinite Integrals.

Résumé

Cet article a cherché à analyser les difficultés auxquelles sont confrontés les élèves de la 12^{ème} année de l'école du Magistério de Soyo, option Mathématiques et Physique, dans le calcul des intégrales indéfinies de fonctions rationnelles et irrationnelles. Il a pour finalité de proposer des activités illustratives pour le calcul d'intégrales indéfinies de fonctions rationnelles et irrationnelles dans le processus d'enseignement-apprentissage, afin de contribuer au développement des compétences en calcul. Dans une approche qualitative et quantitative, le questionnaire appliqué aux élèves a permis de déterminer que 68% des élèves présentent des lacunes dans le calcul d'exercices liés aux intégrales indéfinies, ce qui affecte le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques. L'entretien avec les enseignants reflète des insuffisances méthodologiques qui sont à l'origine des problèmes des élèves. Dans les considérations finales, les analyses obtenues par la recherche de terrain ainsi que les divers conflits et tensions présentés par les sujets de la recherche ont été mis en évidence. Le résultat final est une proposition d'activités illustratives pour le calcul d'intégrales indéfinies de fonctions rationnelles et irrationnelles, avec une approche théorique-pratique, où l'élève doit passer par plusieurs niveaux de connaissances, du niveau théorique au niveau pratique.

Mots-clés: Processus d'enseignement-apprentissage; Intégrales Indéfinies.

Introdução

O processo de ensino-aprendizagem de integrais indefinidas dos alunos da 12^a classe, da opção Matemática e Física, da escola do Magistério do Soyo, enfrenta desafios complexos e multifacetados. Por um lado, os alunos demonstram dificuldades em compreender e se envolver com o conteúdo ligado ao cálculo de integrais indefinidas, muitas vezes devido aos métodos de ensino tradicionais e pouco motivadores. Por outro lado, os professores encontram obstáculos para alcançar resultados satisfatórios e despertar o interesse dos alunos. Essa dinâmica, caracterizada por uma relação pouco produtiva entre ensino-aprendizagem, exige uma profunda reflexão sobre as práticas pedagógicas. Este artigo, propõe actividades ilustrativas de cálculo de integrais indefinidas de funções racionais e irracionais.

O professor, qualquer que seja o nível em que actue, pode e deve buscar razões e motivações próprias para alcançar seus objectivos como educador e promover o alcance dos objectivos dos educandos. Este artigo procurou conhecer um pouco dessa realidade como situação crítica no ensino-aprendizagem da Matemática, na escola do Magistério do Soyo.

Os conceitos de cálculo integral, na maioria das vezes, têm sido “ensinados e aprendidos” por meio das aulas que valorizam a memorização, a aplicação de técnicas, regras e algoritmos. Dessa forma, os professores têm a convicção de que o conteúdo foi “ensinado” e os alunos têm convicção de que o conteúdo foi “aprendido”. No entanto, observa-se no ensino superior, o curso de cálculo diferencial e integral I, considerado básico nos cursos da área de ciências exactas, apresenta um índice muito alto de abandono e repetência. Esta questão foi constatada em 1992 por um estudo realizado por Masetto, que apontou que cerca de 80% a 85% dos alunos foram reprovados. (Masetto, 2000, citado por Melo, 2002).

Onde está o problema?

Barbosa e Neto (1995), enfatizam que um dos factores que interfere no rendimento do aluno é a maneira como se processam os conhecimentos. A forma tradicional baseada no modelo que trata o conteúdo como pronto e acabado. O aluno é treinado a utilizar fórmulas, regras, aceitando e reproduzindo passivamente o que o professor “transmite” não sendo, portanto, motivado a construir seu conhecimento.

Enquadramento teórico

Processo de ensino-aprendizagem

Para Libâneo (1994), o processo de ensino-aprendizagem é mediado pelo professor e pelo aluno, e o seu objectivo é construir o conhecimento, que faz parte do processo de construção. O processo de construção é recíproco, o professor e o aluno actuam activamente dentro da construção didáctica, o aluno não é um quadro branco, a experiência da sua geografia deve ser uma parte componente deste processo.

O processo de ensino-aprendizagem tem sido historicamente caracterizado de formas diferentes, que vão desde a ênfase no papel do professor como transmissor de conhecimento, até as concepções actuais que concebem o processo de ensino-aprendizagem como um todo integrado que destaca o papel do educando. Nesse último enfoque, considera-se a integração do cognitivo e do afectivo, do instrutivo e do educativo como requisitos psicológicos e pedagógicos essenciais. O instrutivo é um processo de formar homens capazes e inteligentes. Entendendo por homem inteligente, quando, diante de uma situação ou problema ele seja capaz de enfrentar e buscar soluções para resolver os problemas. Ele tem de desenvolver sua inteligência e isso só será possível se ele for formado mediante a utilização de actividades lógicas. O

educativo consegue-se com a formação de valores, sentimentos que identificam o homem como ser social, compreendendo o desenvolvimento de convicções, vontade e outros elementos da esfera volitiva e afectiva que junto com a cognitiva permitem falar de um processo de ensino-aprendizagem que tem por fim a formação multilateral da personalidade do homem.

Meios de ensino e sua importância

O incremento da informação no mundo, como resultado da revolução científica e técnica, que se caracteriza por um desenvolvimento vertiginoso da ciência e a diminuição do período de tempo entre os lucros científicos e sua aplicação técnica e industrialização, conduzem a pensar em um aumento da densidade dos programas escolares. Quer dizer, a informação aumenta e o tempo para transmiti-la dentro da instituição escolar se mantém constante. Isto representa um problema actual no que se dedicam hoje pedagogos de diversos países.

Segundo Correa (2012), uma via de solução a este problema é elevar a produtividade do trabalho dos professores e estudantes; por isso, os professores em todo mundo manifestam um grande interesse por aperfeiçoar o ensino e elevar sua efectividade.

Os meios de ensino são os componentes do processo educativo que servem de sustento material aos métodos de ensino. Quer dizer, não se podem separar os meios dos métodos.

Os meios de ensino, permitem maior eficiência no processo de assimilação do conhecimento pelos estudantes e criar as condições para o desenvolvimento de capacidades, hábitos, habilidades e a formação de convicções; reduzem grandemente o tempo necessário para a aprendizagem; permitem um maior aproveitamento dos órgãos sensoriais; obtém-se uma maior permanência na memória dos conhecimentos adquiridos; eleva-se a efectividade do sistema escolar; motivam a aprendizagem e activam as funções intelectuais para a aquisição do conhecimento; facilitam que o estudante seja agente de seu próprio conhecimento, quer dizer, contribuem para que o ensino seja activo e permitem a aplicação dos conhecimentos adquiridos.

Os meios não só intervêm no processo de ensino, mas também são elementos poderosos no trabalho educativo. Para aproveitar as potencialidades do estudante, devem-se utilizar meios que lhe exigem um trabalho activo para a compreensão do novo conteúdo e o reforço do já aprendido, integrado em um harmónico balanço com as actividades de consolidação e fixação do conhecimento por parte do professor.

O uso adequado dos meios de ensino, eleva as possibilidades e a qualidade do trabalho de ensino e educação dos professores, aperfeiçoa as actividades cognitivas e de assimilação dos estudantes nas diferentes etapas do processo de ensino-aprendizagem.

Papel do professor na construção do conhecimento

O papel do professor na construção do conhecimento é fundamental. Ao actuar como mediador, ele facilita a interação do aluno com o objecto de conhecimento, promovendo a construção de significados e a aquisição de novas habilidades. Piaget (1975), postula que o conhecimento se constrói a partir da interação activa do sujeito com o objecto a ser conhecido. Essa construção se dá através da organização e sistematização das informações obtidas a partir das experiências. Para o autor, o conhecimento não é algo passivamente recebido, mas sim uma construção activa do sujeito, que busca dar sentido ao mundo à sua volta. A abstração reflexiva, processo pelo qual o sujeito extrai características comuns a diferentes situações, é fundamental para essa construção. O professor, ao estabelecer conexões entre os novos conhecimentos e as experiências prévias do aluno, proporciona um ambiente de aprendizagem significativo, no qual o aluno se sente motivado a explorar e construir seu próprio conhecimento.

A teoria de Piaget enfatiza a importância da exploração activa do objecto de conhecimento pelo aluno. Ao explorar e manipular o objecto, o aluno constrói esquemas mentais que lhe permitem compreender o mundo. Desse modo, o conhecimento não é uma cópia da realidade, mas uma construção pessoal e única. A aprendizagem, segundo Piaget, está intimamente ligada à ação e à experimentação, sendo fundamental que o aluno tenha oportunidades de manipular objetos, realizar experimentos e resolver problemas.

Dessa maneira, tanto o professor e o aluno têm liberdade de estar dialogando durante o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem, estabelecendo-se assim um processo de comunicação autêntica na construção do conhecimento na sala de aula. De modo que as mudanças ocorridas nessa relação pedagógica, reflitam também um clima de afectividade, comunicação, respeito e ambiente de harmonia em favor da aprendizagem.

Ensino-aprendizagem da Matemática

Diversos estudos, como o de Piovesan e Zanardini (2008), apontam para a necessidade de buscar novas abordagens que tornem o ensino da Matemática mais significativo e eficaz, superando os desafios e promovendo uma aprendizagem mais significativa e prazerosa para os alunos.

Segundo Ballester (1995), a aprendizagem da Matemática não se diferencia de outros tipos de aprendizagem. Como sabemos, ao ensinar devemos partir do simples ao complexo. Nas últimas décadas, a Didática geral e em particular a Didática da Matemática, viria ser influenciada em diferentes partes do mundo, por tendências muito avançadas nas que se advoga que os alunos assumam o papel de protagonismo

no processo de ensino-aprendizagem, que obtenham maior independência cognitiva, que tenham capacidade de utilizar correctamente os métodos indutivos e dedutivos da lógica, para o desenvolvimento integral de sua personalidade.

Segundo Miguel e Miorim (2004, pp. 70-71), o ensino da matemática visa não apenas a transmissão de conhecimentos, mas também o desenvolvimento de habilidades, valores e atitudes que contribuam para a formação integral do indivíduo".

Segundo Sousa, 2014 citado por Araújo, 2021:

"A matemática é vista por alguns pesquisadores como o alicerce, ou ferramenta de outras áreas do conhecimento, é dotada de argumentos lógicos, de análises e inferências que permite desenvolver o nível cognitivo e criativo. Tem sua utilização defendida, nos mais diversos graus de escolaridade, como meio para fazer emergir essa habilidade em criar, resolver problemas, e modelar. Faz-se necessário assim encontrar meios, para desenvolver aos alunos a capacidade de ler e interpretar o domínio da Matemática. No que se refere ao seu ensino, a Matemática no âmbito pedagógico está sempre em meios às discussões, que fazem surgir novas teorias e novas metodologias que visem uma maior assimilação por parte dos estudantes, há aqueles que a defendem com uma força enorme, geralmente, profissionais da área, e há também muitos que a criticam, que discutem o seu valor em uma sociedade e a importância que seu ensino traz a uma nação. Várias avaliações e exames veem a matemática uma forma de explorar o potencial da mente humana" (Sousa, 2014, p. 15, citado por Araújo, 2021).

Desse modo, ao longo de nossas leituras e compreensões, defendemos que, aprender matemática é mais do que manejar fórmulas, saber fazer contas ou marcar x nas respostas: é interpretar, criar significados, construir seus próprios instrumentos para resolver problemas, estar preparado para perceber estes mesmos problemas, desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de conceber, projetar e transcender o imediatamente sensível.

Integrais indefinidas

Definição: Integral indefinida: o conjunto $\{ F(x) + C \}$ de todas as primitivas de uma mesma função f chama-se integral indefinida de f e se denota por $\int f(x) dx$, quer dizer:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Onde dx aparece apenas para indicar que x é a variável independente. Se F é uma primitiva de f temos que:

$$\int f(x) dx = \{ F(x) + C : C \in \mathbb{R} \}$$

O que é denotado simplesmente por $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Onde C é uma constante arbitrária, que percorre todos os números reais. Isso ocorre pois duas primitivas da função f necessariamente diferem por uma constante e sempre que se adiciona uma constante a uma primitiva de f obtém-se uma nova primitiva de f .

Propriedades da integral indefinida

Seja $f(x)$, $g(x)$:

$$1. \int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$2. \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

$$3. \int kf(x)dx = k \int f(x)dx, \quad k \neq 0, k \in \mathbb{R}$$

Métodos de integração

Para levar a cabo o processo de integração, existem três métodos de integração, que se aplicam tendo em conta as particularidades de cada integrando: método de integração por substituição, método de integração por partes² e método de integração por decomposição de fracções racionais em soma de fracções parciais ou fracções simples.

Método de integração por substituição

Segundo Stewart (2002), este método se utiliza quando na integral se apresenta uma função e seu próprio diferencial ou só se precisa completar este último multiplicando por uma constante. Podem apresentar-se muitos casos para ser resolvidos por este método de integração, exemplificados nos exemplos seguintes:

I. Para uma integral da forma $\int f(x) \cdot f'(x)dx$, realiza-se a substituição $u = f(x)$ para obter directamente, ou através de um complemento, o diferencial $du = f'(x)dx$.

Se se fizer a substituição de variável, fica que:

$$\int f(x) \cdot f'(x)dx = \int udu = \frac{u^2}{2} = \frac{[f(x)]^2}{2} + C$$

² De acordo com o tema, o método de integração por partes não será abordado neste artigo.

II. Para uma integral da forma $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$, realiza-se a substituição $u = f(x)$ para obter directamente, ou a través de um complemento, o diferencial $du = f'(x) dx$. Se se fizer a substituição de variável, fica que:

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(fx) + C$$

III. Para uma integral da forma $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx$, realiza-se a substituição $u = f(x)$ para obter directamente, ou a través de um complemento, o diferencial $du = f'(x) dx$. Se se fizer a substituição de variável, fica que:

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \int \frac{f'(x)dx}{1+[f(x)]^2} = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C = \arctan f(x) + C$$

Método de integração por decomposição de fracções racionais em soma de fracções parciais ou fracções simples

Para a aplicação deste método de integração, é preciso que o integrando seja uma fracção racional própria (quer dizer, que o grau do polinómio do numerador seja menor que o grau do polinómio do denominador). No caso que seja uma fracção racional imprópria (quer dizer, que o grau do polinómio do numerador seja maior ou igual a grau do polinómio do denominador), realizar uma divisão algébrica longa seria uma ferramenta para sua transformação em termos de um polinómio unido a uma fracção racional própria (em sua forma simples ou transformável a uma soma de fracções parciais ou simples).

O resultado da divisão é:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \quad ; \quad p(x) \geq q(x)$$

Onde s e r também são polinómios.

$p(x)$ é o dividendo;

$s(x)$ é o quociente;

$r(x)$ é o resto;

$q(x)$ é o divisor.

Regras de divisão de polinómios

Passo I. Escrevemos os polinómios $p(x)$ e $q(x)$ na ordem decrescente dos expoentes dos seus termos e completamo-los com os termos de coeficientes zero.

Passo II. Dividimos o termo de maior grau do dividendo $p(x)$ pelo termo de maior grau do divisor $q(x)$. Obtém-se desta forma, o primeiro termo do quociente $s(x)$.

A seguir multiplicamos o termo obtido pelo divisor e subtraímos o produto obtido do dividendo.

Se o polinómio que representa a diferença obtida tenha grau maior ou igual ao do divisor, ele passa a ser um novo dividendo e repete-se o algoritmo a partir do 2º passo.

Se o polinómio que representa a diferença obtida tenha grau inferior ao do divisor ele representa o resto $r(x)$.

Exemplo de divisão de polinómios

Sejam $p(x) = x^3 + 1$ e $q(x) = x - 1$, divide os polinómios.

Passo I.

$$p(x) = x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \text{ e } q(x) = x - 1$$

Passo II.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x - 1 \\ -x^3 + x^2 & \hline x^2 + 0x + 1 & \end{array}$$

O polinómio $x^2 + 0x + 1$ que representa a diferença obtida $s(x)$ tem grau maior do que o do divisor, portanto, repetimos o **passo II**.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 0x + 1 & x - 1 \\ -x^2 + x & \hline x + 1 & \\ 2 & \end{array}$$

O polinómio $x + 1$ que representa a diferença obtida $s_1(x)$ tem mesmo grau que o do divisor, portanto, repetimos o **passo II**.

$$\begin{array}{r|l} x + 1 & x - 1 \\ -x + 1 & \hline x^2 + x + 1 & \end{array}$$

A expressão que representa a diferença obtida tem grau inferior ao do divisor e, portanto temos:

$$\frac{x^3 + 1}{x - 1} = (x^2 + x + 1) + \frac{2}{x - 1}$$

Decomposição de fracções racionais próprias

Toda fracção racional própria pode-se expressar como soma de fracções simples cujos denominadores são da forma $(ax + b)^n$ e $(ax^2 + bxc)^n$ sendo n um número inteiro e positivo.

Atendendo à natureza dos factores do denominador, podem-se considerar quatro casos:

Caso I. O denominador $q(x)$ é um produto de factores lineares distintos

$q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_nx + b_n)$, onde nenhum fator é repetido (e nenhum factor é múltiplo constante do outro).

Nesse caso, a cada factor linear, $(ax + b)$, do denominador numa fracção racional própria, corresponde uma fracção da forma: $\frac{A}{ax+b}$, onde A é uma constante a determinar.

Exemplo do caso I

$$\frac{x^2 + 3}{x^3 + 5x^2 + 6x}$$

Resolução: Como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não precisamos dividir. Factoramos o denominador como:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = x(x^2 + 5x + 6) = x(x + 2)(x + 3)$$

Como o denominador tem três factores lineares distintos, a decomposição em fracções parciais tem a forma:

$$\frac{x^2 + 3}{x(x + 2)(x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x + 3}$$

Caso II. $q(x)$ é um produto de factores lineares, e alguns dos factores são repetidos

Cada factor linear $(ax + b)$, que figure n vezes no denominador numa fracção racional própria, corresponde uma soma de n fracções da forma:

$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$, sendo A_1, A_2, A_n constantes a determinar.

Exemplo do caso II

$$\frac{1}{x(x+1)^2}$$

Tem uma decomposição em fracções parciais da forma

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

Caso III. $q(x)$ Factores quadráticos irreduzíveis e distintos

Se $q(x)$ tiver o factor $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então:

A cada factor quadrático irreduzível $(ax^2 + bx + c)$ no denominador de uma fracção racional própria, corresponde uma fracção da forma $\frac{Ax+B}{Ax^2+bx+c}$, sendo A e B constantes a determinar.

Exemplo do caso III

$$\frac{x^2 - 3}{x(x^2 + 4)(x^2 + 8)}$$

Tem uma decomposição em fracções parciais da forma

$$\frac{x^2 - 3}{x(x^2 + 4)(x^2 + 8)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} + \frac{Dx + E}{x^2 + 8}$$

Caso IV. $q(x)$ factores quadráticos irreduzíveis repetidos

Se $q(x)$ tiver o factor $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então:

A cada factor quadrático irreduzível $(ax^2 + bx + c)$, que se repete n vezes no denominador de uma fracção racional própria, corresponde uma soma de n fracções da forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}; \text{ sendo A e B constantes a determinar.}$$

Exemplo do caso IV

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)^2}$$

Tem uma decomposição em fracções parciais da forma:

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Os coeficientes $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, D, E$ calculam-se aplicando o método dos “coeficientes indeterminados”

Procedimentos metodológicos

Quanto a sua abordagem, a presente pesquisa sustenta-se no paradigma de investigação mista, dadas as particularidades do objecto de estudo. Utilizou-se a pesquisa bibliográfica e pesquisa de campo para recolha de dados e análise das informações.

Apresentação e discussão dos resultados

Passos para a colecta de dados

Passo 1: Identificar o nível de conhecimento prévio dos alunos acerca das integrais indefinidas.

Passo 2: Avaliar as dificuldades metodológicas enfrentadas pelos professores no ensino de integrais indefinidas.

Passo 3: Analisar como os professores conduzem as aulas sobre integrais, incluindo explicações teóricas e resolução de exercícios.

Interpretação quantitativa:

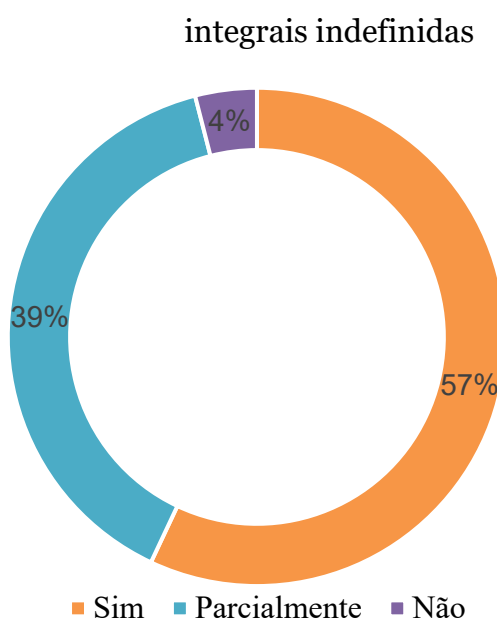
Utilizar ferramentas como Microsoft Excel para criar gráficos e tabelas que mostrem o desempenho dos diagnósticos.

Interpretação qualitativa:

Analisar as respostas abertas da entrevista para identificar padrões nas percepções dos alunos e professores

Discussão do questionário aplicado aos alunos

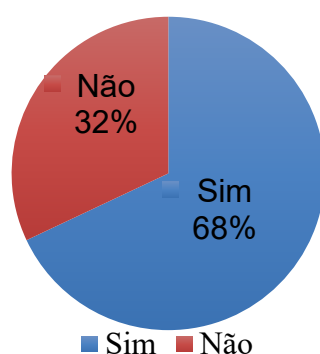
Gráfico 1- Deficiências que afectam o ensino médio na aprendizagem de



Fonte: Elaborado por autor (2025)

A elevada percentagem de alunos (57%) que identificam deficiências no ensino médio na aprendizagem de integrais indefinidas, sugere que há lacunas significativas na abordagem pedagógica actual. Isso pode incluir a falta de recursos didácticos, metodologias inadequadas ou insuficiência na formação dos professores, o que impacta diretamente na aprendizagem das integrais.

Gráfico 2- Dificuldade em reconhecer os métodos de cálculo de integrais indefinidas.



Fonte: Elaborado por autor (2025)

A dificuldade expressa por 68% dos alunos em não reconhecer os métodos de cálculo de integrais indefinidas, é um sinal claro de que as estratégias pedagógicas actuais não estão sendo eficazes. Isso sugere uma necessidade urgente de revisão nas abordagens utilizadas para ensinar esses métodos.

Discussão da entrevista aplicada aos professores

Os professores entrevistados, enfrentam desafios relacionados à eficácia de suas metodologias de ensino. Muitos alunos sentem que a abordagem pedagógica utilizada não é adequada para facilitar a compreensão das integrais indefinidas. As análises da entrevista sugerem que os professores precisam de formação contínua e apoio para diversificar suas estratégias de ensino, incorporando métodos mais interativos e práticos.

As dificuldades identificadas aos professores em função ao estado encontrado nos alunos, refletem um conjunto de factores que afetam o processo de ensino-aprendizagem das integrais indefinidas. Para abordar essas questões, é fundamental implementar uma proposta que considere as necessidades dos alunos e capacite os professores com as ferramentas necessárias para melhorar a eficácia do ensino.

1. Proposta: actividades ilustrativas

5.1. Objectivos das actividades ilustrativas

- Permitir aos alunos aprofundar os conteúdos recebidos e, em alguns casos, a aprendizagem de forma auto-didacta;
- Desenvolver habilidades de cálculo de integrais indefinidas das funções racionais e irracionais.

5.2. Actividade ilustrativa de cálculo de integrais indefinidas de funções racionais impróprias

$$\int \frac{x^3 + 1}{x - 1} dx$$

A função integrando é uma fracção racional imprópria, pois o grau do numerador é maior que o de denominador. Portanto, dividem-se os polinómios.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x - 1 \\ -x^3 + x^2 & \hline x^2 + 0x + 1 & \\ -x^2 + x & \\ x + 1 & \\ -x + 1 & \end{array}$$

2

$$\frac{x^3 + 1}{x - 1} = (x^2 + x + 1) + \frac{2}{x - 1}$$

$$\int \frac{x^3 + 1}{x - 1} dx = \int \left[(x^2 + x + 1) + \frac{2}{x - 1} \right] dx = \int (x^2 + x + 1) dx + 2 \int \frac{dx}{x - 1}$$

$$= \int x^2 dx + \int x dx + \int dx + 2 \int \frac{dx}{x - 1}$$

$$\int \frac{x^3 + 1}{x - 1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x - 1| + C$$

5.3. Actividade ilustrativa de cálculo de integrais indefinidas de funções racionais próprias

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$$

Resolução: Como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não precisamos dividir. Factoramos o denominador como:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Como o denominador tem dois factores lineares distintos, a decomposição em frações parciais tem a forma:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{(x - 3)} + \frac{B}{(x - 2)}$$

Passo 1. Aplicar método de coeficientes indeterminados

Procurando o denominador comum, tem-se:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A(x - 2) + B(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)}$$

Igualando os denominadores:

$$1 = Ax - 2A + Bx - 3B \Rightarrow 1 = (A + B)x + (-2A - 3B)$$

Passo 2. Cálculo das constantes A e B:

Método geral. Se identificam os coeficientes de igual potência de x e se resolve o sistema de equações obtido para determinar o valor das constantes. Isto é:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 / 3 \\ -2A - 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A + 3B = 0 \\ -2A - 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 1$$

Substituindo o valor de A, teremos:

$$1 + B = 0 \Rightarrow B = -1$$

Método abreviado: Se substituí os valores de x que anulam os denominadores das frações, quer dizer, para $x = 2$ e $x = 3$ obtendo: $1 = A$ e $1 = -B \Rightarrow -1 = B$

Passo 3. Achar a integral com os resultados das constantes A e B. Ou seja:

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x - 3)} + \frac{-1}{(x - 2)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \left(\frac{1}{x - 3} + \frac{-1}{x - 2} \right) dx = \int \frac{1}{x - 3} dx - \int \frac{1}{x - 2} dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \ln|x - 3| - \ln|x - 2| + c = \ln \left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| + C$$

Actividade ilustrativa de integrais indefinidas de funções irracionais por Método de Integração por substituição

O método de integração por substituição ou mudança de variável é consequência directa da regra de cadeia.

$$\int x\sqrt{x+1}dx$$

Fazendo $\sqrt{x+1} = t$; Aplicando as propriedades das equações irracionais, teremos: $x + 1 = t^2$ isolando x teremos: $x = t^2 - 1$

Derivando os dois membros teremos:

$dx = 2t dt$, substituindo teremos:

$$\begin{aligned} \int (t^2 - 1)t \cdot 2t dt &= 2 \int (t^2 - 1)t \cdot t dt = 2 \int (t^4 - t^2) dt = 2 \left(\int t^4 dt - \int t^2 dt \right) \\ &= 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) + C \end{aligned}$$

Substituindo o valor do t , teremos:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+1}dx &= 2 \left(\frac{\sqrt{(x+1)^5}}{5} - \frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} \right) + C \\ &= 2 \left(\frac{(x+1)^2 \sqrt{(x+1)}}{5} - \frac{(x+1)\sqrt{(x+1)}}{3} \right) + C \end{aligned}$$

Considerações finais

O marco teórico realizado sobre o cálculo de integrais indefinidas de funções racionais e irracionais aos alunos da 12^a classe, da Escola do Magistério do Soyo, assume-se de uma perspectiva sistematizada, para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, permitindo compreender os referentes teóricos que são essenciais para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem deste conteúdo.

O questionário aplicado aos alunos da 12^a classe da Escola do Magistério do Soyo, permitiu determinar que, 68% dos alunos apresentam deficiências no cálculo de exercícios relacionados as integrais indefinidas, afectando o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. A entrevista aos professores reflecte insuficiências metodológicas que são causas dos problemas dos alunos.

A proposta de actividades ilustrativas de cálculo de integrais indefinidas de funções racionais e irracionais no processo de ensino-aprendizagem aos alunos da 12^a classe, da escola do Magistério do Soyo, foi elaborada em conformidade aos resultados dos inquéritos. Esta proposta é dinâmica e adaptável, buscando atender as necessidades dos alunos e superar as dificuldades identificadas nos inquéritos. Ao incorporar essas características, espera-se melhorar significativamente o processo de ensino-aprendizagem das integrais indefinidas, promovendo um ambiente mais colaborativo, motivador e eficaz.

Referências Bibliográficas

- Araújo, F. G. M. (2021). Contribuições da matemática recreativa no desenvolvimento e aprendizagem escolar [Licenciatura em matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte].
- Ballester, S. (1995). Didáctica de la matemática (Tomo I y II). Editorial Universitaria Félix Varela.
- Barbosa, O. B. & Neto, H. B. (1995). Raciocínio lógico formal e aprendizagem em cálculo diferencial e integral: O caso da Universidade Federal do Ceará. *Temas e Debates*, 8(6), 61-69.
- Correa, F. (2012). Fundamentación del uso de los medios de enseñanza.
http://www.unacar.mx/cuerpos/educacion_fisica/contenido/articulos_ef/medios.
- Libâneo, J. C. (1994). O processo de ensino na escola. Cortez.
- Melo, J. (2002). Conceito de integral: uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem. [Dissertação de mestrado em educação matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo].
- Miguel, A. & Miorim, M. A. V. (2004). Educação matemática: desafios da escola contemporânea. *Artmed*.
- Piaget, J. (1975). A formação do símbolo na criança: imitação, jogo, sonho e representação. Zahar.
- Piovesan, D. & Zanardini, C. A. (2008). A matemática no ensino fundamental: Construindo um olhar sobre a prática pedagógica. *Bolema: Boletim de educação matemática*, 22(32), 57-76.
- Stewart, J. (2002). Cálculo con transcendentales tempranas (4ª ed.). Thomson.

Recebido: 12/08/2025

Aceite: 14/04/2026



Este artigo está licenciado sob a licença: [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). Ao submeter o manuscrito o autor está ciente de que os direitos de autor passam para a Revista Científica Multidisciplinar N' Kwa Zayi.