Aplicação da Transformada de Laplace na Análise de Circuitos Eléctricos no Ensino da Física

Application of the Laplace Transform to the Analysis of Electric Circuits in Physics Teaching

Jorge Maria Gonçalves Mayer [1]
Instituto Superior de Ciências de Educação da Huíla
jorge.mayer@isced-huila.ed.ao

Daniel Catalayu Passile [2]
Escola do I Ciclo do Ensino Secundário da Arimba
passilek@gmail.com

Resumo

No presente artigo abordamos a aplicação da transformada de Laplace no Processo de Ensino – Aprendizagem no 4º Ano do Curso de Ensino da Física do ISCED – Huíla para determinar a corrente eléctrica que flui num circuito, como um método matemático de resolução mais cómodo de circuitos eléctricos mais complexos, quando as leis de Kirchhoff apresentam limitações no estudo de alguns circuitos. A transformada de Laplace aplica-se a qualquer circuito eléctrico independentemente da sua complexidade.

Palavras-chave: Física Matemática, transformada de Laplace, circuitos eléctricos.

Abstract

In this article we discuss the application of the Laplace transform in the Teaching - Learning Process in the 4th Year of the ISCED Physics Teaching Course - Huíla to determine the electric current flowing in a circuit, as a more convenient mathematical method for solving electrical circuits more complex, when Kirchhoff's laws have limitations in the study of some circuits. The Laplace transform applies to any electrical circuit regardless of its complexity.

Keywords: Mathematical Physics, Laplace transform, electrical circuits.

Introdução

Todo e qualquer fenómeno físico é uma função do tempo e, cada fenómeno exige uma expressão matemática própria e adequada para descrever e/ou analisar o seu comportamento no decorrer do tempo, pois a linguagem da Física é a

[1] Doutor em Ciências Pedagógicas, especialidade Física.
[2] Licenciado em Ciências da Educação, opção Física

Matemática. Por exemplo, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) e as Equações Diferenciais com Derivadas Parciais (EDP's) descrevem o modo como certos fenómenos físicos variam com o tempo.

Na unidade curricular Física Matemática, do Curso de Licenciatura em Ensino da Física, no ISCED-Huíla, temos as equações diferenciais com derivadas parciais, que constituem equações principais, como a equação do calor ou equação de Fourier, a equação da onda e a equação de Laplace e nos conteúdos sobre a Transformada de Laplace.

Os problemas decorrentes do movimento de fluídos, do fluxo de corrente eléctrica em circuitos, da dissipação de calor em objectos sólidos, da propagação e detecção de ondas sísmicas, bem como da variação do tamanho de uma população, entre outros, são exemplos de alguns fenómenos físicos cujo estudo e descrição exigem vários métodos e procedimentos matemáticos já conhecidos, e utilizados, principalmente, por físicos, matemáticos e engenheiros (Pacheco, 2011).

Em Física, um mesmo fenómeno pode ser estudado, analisado e/ou descrito por vários métodos/procedimentos matemáticos no seu tratamento quantitativo e/ou qualitativo, sobrepondo-se entre si pela limitação e/ou comodidade que cada método oferece.

Tendo em conta um caso concreto, para estudar, analisar e descrever o comportamento da tensão e da intensidade da corrente eléctrica num circuito eléctrico completo menos complexo, principalmente ao nível do Ensino Fundamental (Ensino Secundário e Profissional) e do Ensino Superior (licenciatura), são aplicados variados métodos e princípios matemáticos, muitos destes conhecidos como métodos algébricos, onde, para alguns casos, mais gerais, se recorre às leis de Kirchhoff, tais como: as leis das malhas e dos nodos.

Quando todos os elementos do circuito eléctrico são função de tempo, quer dizer, variam no decorrer do tempo, os métodos convencionais tornam-se limitados, particularmente as leis de Kirchhoff, exigindo uma análise integro-diferencial do comportamento dos elementos do circuito eléctrico. Desta feita, muitos autores apontam a Transformada de Laplace $(\mathcal{L})$ como uma das ferramentas mais eficazes e eficientes na análise de circuitos eléctricos, quando os métodos algébricos aplicados nas leis de Kirchhoff, tornam-se limitados, sendo que a Transformada de Laplace é um método diferencial, "ideal" para o estudo, análise e descrição de circuitos eléctricos completos mais complexos, pois, torna-se mais fácil e simples analisá-lo no domínio da frequência $F(s)$, e depois fazer a transformada inversa $(\mathcal{L}^{-1})$ para o domínio do tempo $f(t)$.

Este é um assunto tratado no 4.º ano, do curso de Licenciatura em Ensino da Física, no Instituto Superior de Ciências de Educação (ISCED-Huíla). Todavia, contrariamente ao que se exige em termos de competências básicas, para frequentar a cadeira de Física Matemática, está o baixo nível de conhecimento dos estudantes, concernente às ferramentas matemáticas, de entre outras, a Transformada de Laplace, necessárias na descrição e compreensão de certos fenómenos físicos, concretamente na análise de circuitos eléctricos complexos, neste nível de escolaridade.

Portanto, têm sido vários os esforços empreendidos pelos docentes de Física Matemática, no Curso de Licenciatura em Ensino da Física do ISCED-Huíla, no sentido de dotar os estudantes de conhecimentos matemáticos essenciais, como os de Transformada de Laplace, pois, alguns docentes de Matemática, que leccionam conteúdos matemáticos no Curso de Licenciatura em Ensino da Física, não tratam de conteúdos relacionados com a Transformada de Laplace.

Desenvolvimento

A transformada de Laplace é um operador. Na realidade, tal como outros já existentes.

$$f(t) \rightarrow \int dx \rightarrow F(s)$$

O método da Transformada de Laplace é um procedimento analítico, firmando-se como uma importante ferramenta para a resolução de equações diferenciais, em particular, das equações lineares com coeficientes constantes e dos correspondentes problemas de valor inicial, pois, permite resolver equações diferenciais em forma de equações polinomiais, que, por sua vez, são muito mais simples de resolver (Silva, 2013).

Definição (Rezende, 2013): dada uma função $f(t)$ definida no intervalo $[0;\infty)$, definimos a sua Transformada de Laplace, denotamos por $F\ (s)$, na forma:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}.f(t).dt = F(s).$$

Por definição, a Transformada de Laplace é uma integral imprópria, pois: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}.f(t).dt$, para todo s, para o qual $\int_0^{\infty} e^{-st}.f(t).dt$, converge, (sendo que uma integral, converge quando o seu limite existe, caso contrário diverge).

Por definição, a integral imprópria é dada por:

$\int_0^{\infty} g\ (t).dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} g(t)\ dt.$ Portanto, a integral imprópria converge quando o seu limite existe e caso contrário diverge.

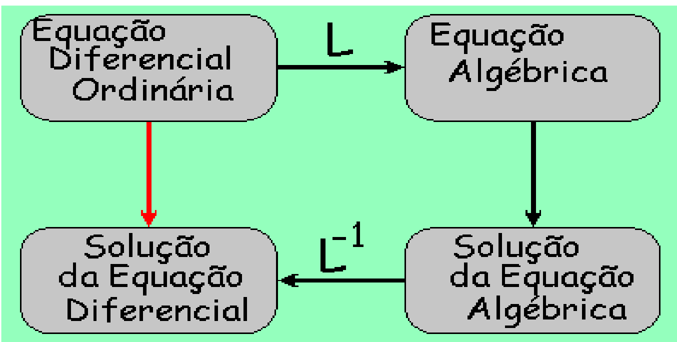
O procedimento para a obtenção da solução de um problema, aplicando a Transformada de Laplace, consiste, basicamente, em três passos, que são (Pacheco, 2011):

1.º Passo: a fim de diminuir o grau de dificuldade do problema e simplificá-lo, a EDO (Equação Diferencial Ordinária) dada é transformada em uma equação algébrica (equação subsidiária);

2.º Passo: a equação subsidiária é resolvida através de manipulação algébrica;

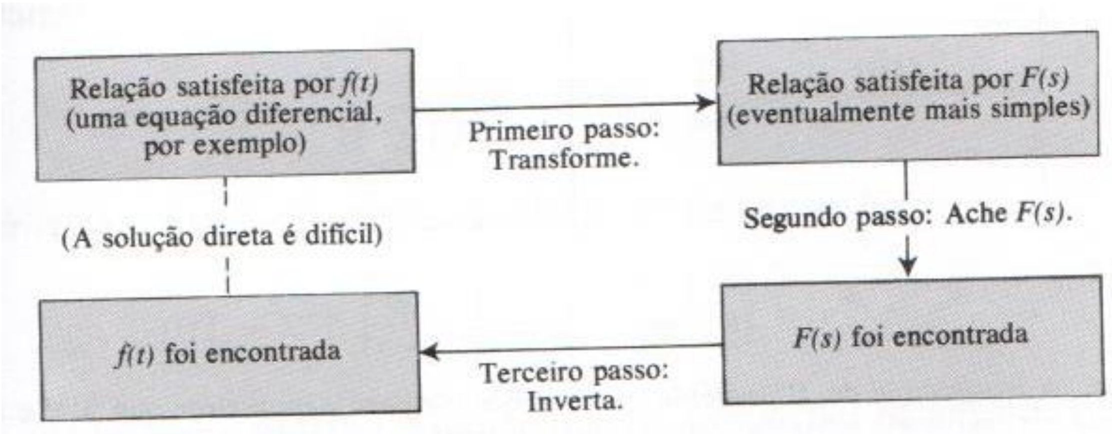
3.º Passo: a solução obtida, através da manipulação, é transformada novamente, via operador inverso, para se obter a solução do problema.

Figura n.º 1: Operacionalização da transformada de Laplace:



Fonte: Pacheco (2011), adaptada pelos autores do artigo.

Figura n.º 2: Operacionalização da transformada de Laplace por uma linguagem física



Fonte: Butkov (2013), adoptada pelos autores.

Propriedades da Transformada de Laplace

Na sua obra, Pacheco (2011) apresenta duas propriedades principais, nomeadamente: linearidade e unicidade.

Apresenta também outras propriedades não menos importantes, como:

i. Propriedade de translação ou deslocamento;
ii. Propriedade da mudança de escala;
iii. Propriedade da derivada de primeira, segunda e n-ésima ordem;
iv. Propriedade da integral;

Com a sua ampla aplicação em variadas situações, nos fenómenos físicos, a Transformada de Laplace tem tabelado uma gama de funções mais utilizadas, facilitando a análise e resolução de equações diferenciais com derivadas parciais de primeira e de segunda ordem, por estas constituídas.

A Transformada de Laplace é um importante método operacional para a Física Matemática. Apresenta duas vantagens principais sobre os demais procedimentos:

a) Os problemas são resolvidos mais directamente. Os problemas de valor inicial são resolvidos sem que seja necessário determinar-se, inicialmente, uma solução geral. Adicionalmente, as EDO's não-homogéneas são resolvidas sem a necessidade de se obter as correspondentes EDO's homogéneas.

b) A segunda e, certamente, mais importante vantagem é devido ao uso da função unitária (função de Heaviside) e do delta de Dirac. Essas ferramentas tornam esse método particularmente poderoso para problemas nos quais os dados iniciais (forças motrizes mecânicas ou eléctricas) têm descontinuidades, representam pequenos impulsos de grande amplitude ou são funções periódicas mais elaboradas (não apenas senóides e cossenóides).

Vamos analisar um circuito simples que, neste caso, permita-se, considerá-lo ''menos complexo'', pois a determinação dos parâmetros do circuito pode ser garantida, aplicando unicamente as leis de Kirchhoff, de modo que estes são totalmente suficientes para análise deste circuito.

De seguida, apresentamos um circuito modelo, considerado ''complexo'', no qual todos os parâmetros do circuito são função do tempo, portanto, as leis de Kirchhoff tornam-se limitadas para a análise do mesmo, sendo imprescindível uma outra abordagem matemática e, neste caso, a Transformada de Laplace.

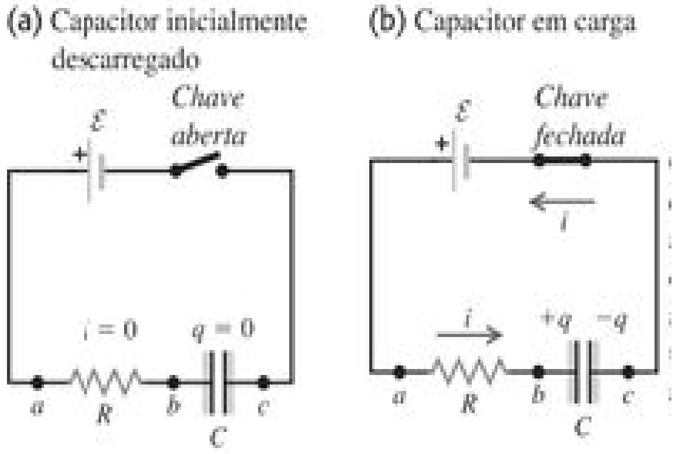
Exemplos

Exercício 1: O condensador de um circuito RC, inicialmente, encontra-se descarregado, portanto, a diferença de potencial $\boldsymbol{V_{bc}}$ através dele é igual a zero, para $t = 0$. Para este instante, pela lei das malhas de Kirchhoff, a voltagem $\boldsymbol{V_{ab}}$ através do resistor $\boldsymbol{R}$ é igual à fem da bateria $\boldsymbol{\varepsilon}$. A corrente inicial $\boldsymbol{I_0}$ através do resistor é dada pela lei de Ohm:

$$\boldsymbol{I_0 = \frac{V_{ab}}{R} = \frac{\varepsilon}{R}}$$

Determinar a carga e a corrente que circula no circuito enquanto o capacitor se carrega, (figura n.º 3).

Figura n.º 3: Circuito RC em série



Fonte: Young & Freedman, (2009 pág. 182) adaptada pelos autores do artigo.

Resolução

À medida que o capacitor se carrega, a sua voltagem aumenta V_{bc} aumenta, enquanto V_{ab} diminui através do resistor, o que corresponde à diminuição da corrente, portanto, as voltagens instantâneas são dadas por:

$$V_{ab} = iR \quad e \quad V_{bc} = \frac{q}{C}$$

Aplicando a lei de Kirchhoff para as malhas (**lei das malhas**) no circuito, obtém-se:

$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0 \qquad (1)$$

Explicitando a intensidade da corrente na expressão (1), tem-se:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC} \qquad (2)$$

No instante $t = 0$, isto é, no instante em que se fecha o interruptor, o condensador está descarregado e, portanto, $q = 0$. Quando a chave estiver fechada, a carga sobre o capacitor aumenta com o tempo, enquanto a corrente diminui.

À medida que a carga q aumenta, o termo $\frac{q}{RC}$ torna-se maior a custo da diminuição da intensidade da corrente i, sendo que a carga do capacitor atinge o seu valor máximo Q quando $i = 0$. Nesta condição, a equação (2), toma a forma:

$$\frac{\varepsilon}{R} = \frac{Q}{RC} \qquad \leftrightarrow Q = C\varepsilon \qquad (3)$$

Parece que, nesta análise, a corrente dá um salto para o seu valor inicial e que, por sinal, o seu maior valor, no instante $t = 0$, tão logo que o interruptor do circuito é fechado, pois em cada $t > 0$ tem-se $i \rightarrow 0$ para a carga, o processo inverso ao da corrente. Portanto, desta análise pode-se deduzir as expressões gerais da carga e da corrente, em função do tempo.

Sendo que,

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (2), vem

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{1}{RC}(q - C\varepsilon) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dq}{(q - C\varepsilon)} = -\frac{dt}{RC} \qquad (5)$$

Integrando ambos membros da equação (5), fica:

$$\int_0^q \frac{dq'}{(q' - C\varepsilon)} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC} \quad \Rightarrow$$

$$ln\left(\frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon}\right) = -\frac{t}{RC} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad (6)$$

Esta é a expressão da carga do capacitor, num circuito RC.

A corrente instantânea i é dada pela derivada da carga em função do tempo, de acordo com a expressão (4). Portanto,

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Uma vez que

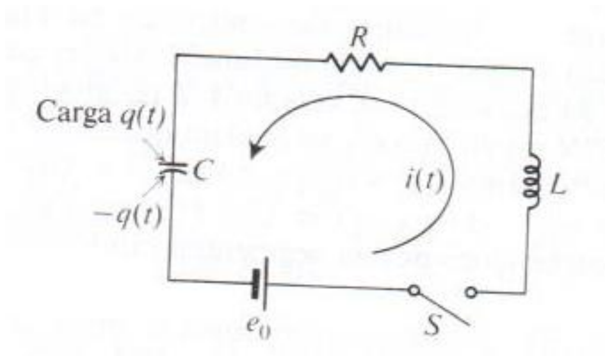
$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

Então a corrente eléctrica, que flui no circuito, é dada por:

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Exercício 2: No circuito LRC, em série, mostrado na figura abaixo, o interruptor S é fechado no instante $t = 0$ e aberto quando $t = T$. Deseja-se achar a corrente $i(t)$, quando $q(0) = 0$ e $i(0) = 0$.

Figura n.º 4: Circuito LRC em série:



Fonte: Butkov, (213), adoptada pelos autores.

Resolução

A lei de Kirchhoff (**lei das malhas**) exige que

$$L\frac{i(t)}{dt} + R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = e(t) \qquad (1)$$

Dadas as condições iniciais, podemos escrever a expressão (1), na forma:

$$e(t) = \begin{cases} e_0 & (0 < t < T) \\ 0 & (t > T) \end{cases}$$

Do outro lado, pela definição de corrente eléctrica, tem-se que

$$i(t) = \frac{d}{dt}q(t) \qquad (2)$$

Neste exemplo, não é possível aplicar as leis de Kirchhoff porque todos os parâmetros da equação (1) são função do tempo, assim, torna-se imprescindível a aplicação da transformada de Laplace na determinação da corrente eléctrica que flui no circuito.

Aplicando a transformada de Laplace, nas equações diferenciais (1) e (2), fica:

$$\mathrm{L}\mathcal{L}\{i'(t)\} + R\,\mathcal{L}\{f(t)\} + \frac{1}{C}\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \mathcal{L}\{q'(t)\}$$

Por definição, a transformada da derivada é dada por

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = S^n\,\mathcal{L}\{f(t)\} - S^{n-1}f(0) - S^{n-2}f'(0) - \cdots -$$

Logo, para ambos casos, teremos:

$$L\mathcal{L}\{i'(t)\} + R\mathcal{L}\{f(t)\} + \frac{1}{C}\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e(t)\} \quad \leftrightarrow$$

$$LsI(s) - Li(0) + R(s) + (1/C)Q(s) = E(s) \qquad (1')$$

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \mathcal{L}\{q'(t)\} \quad \leftrightarrow$$

$$I(s) = sQ(s) - q(0) \qquad (2')$$

Usando as condições iniciais $q(0) = 0$ e $i(0) = 0$ em (1′) e (2′), vem

$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C}Q(s) = E(s) \qquad (\#)$ e

$I(s) = sQ(s) \leftrightarrow Q(s) = \frac{I(s)}{s} \qquad (\#\#)$. Substituindo (##) em (#), temos:

$\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) = E(s)$. A partir da relação $e(t) = e_0\,;(0 < t < T)$, é válido escrever:

$$E(s) = \mathcal{L}\{e_0\} = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e_0\,.\,e^{-st}\,dt \quad \leftrightarrow$$

$$E(s) = e_0 \cdot \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}\,dt \quad \leftrightarrow$$

$$E(s) = e_0 \cdot \left[-\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^T\right]$$

$E(s) = e_0 \cdot \left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\right] \qquad (3)$. Portanto, a partir de

$\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) = E(s)$ tem-se

$$I(s) = \frac{E(s)}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} \qquad (4)$$

Usamos a Transformada de Laplace com o propósito de transformar as equações (1) e (2) em soma algébrica. Pretendendo determinar a corrente $i(t)$ e não $I(s)$, aplicaremos a operação inversa da transformada **(** $\mathcal{L}^{-1}$**)**.

Um método muito geral, mas eficiente para calcular a transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$ de uma função $F(s)$, é a decomposição de fracções racionais.

Seja $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$; sendo $Q(s) > 0$ e de grau maior $P(s)$, vale escrever:

$\frac{Bs+C}{s^2+as+b} = \frac{B(s+{}^{a}/_{2})+[C-({}^{a}/_{2})B]}{(s+{}^{a}/_{2})^2+C^2}$; com B e C constantes e $C^2 = \left(b - \frac{a^2}{4}\right) \leftrightarrow$

$$\frac{B(s+{}^{a}/_{2})}{(s+{}^{a}/_{2})^2+C^2} + \frac{[C-({}^{a}/_{2})B]}{(s+{}^{a}/_{2})^2+C^2}$$

Podemos então deduzir que

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B(s+{}^{a}/_{2})}{(s+{}^{a}/_{2})^2+C^2}\right\} = Be^{-({}^{a}/_{2})t} \cdot \cos ct$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C-({}^{a}/_{2})B}{(s+{}^{a}/_{2})^2+C^2}\right\} = \left(\frac{C-({}^{a}/_{2})B}{C}\right) e^{-({}^{a}/_{2})t} \cdot \operatorname{sen} ct$$

Logo, nesta linha de pensamento, substituindo (3) em (4), no exercício; temos:

$$I(s) = \frac{E(s)}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{e_0(1-e^{-sT})}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}$$

Ainda podemos escrever esta expressão na forma:

$$I(s) = \frac{e_0}{L} \cdot \frac{(1-e^{-sT})}{\left[s^2 + ({}^{R}/_{L})s + \frac{1}{LC}\right]} \qquad (5)$$

Aplicando a propriedade acima, temos:

$* \ (s^2 + as + b) = \left[s^2 + ({}^{R}/_{L})s + \frac{1}{LC}\right]$; sendo $a = \frac{R}{L}$ e $b = \frac{1}{LC}$

$* \left(b + \frac{a^2}{4}\right) = \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right);$

$* \left(s + \frac{a}{4}\right)^2 = \left(s + \frac{R}{4L}\right)^2;$

E considerando: $\propto = \frac{R}{2L}$ e $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$

Podemos reescrever (5) na forma:

$$I(s) = \frac{1}{L} \cdot \left[\frac{(e_0 - e_0 \cdot e^{-sT})}{s^2 + ({}^{R}/_{L})s + \frac{1}{LC}}\right] \qquad (6)$$

Não tendo nenhum factor de s no numerador, implica que $B = 0$, logo,

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} \quad \leftrightarrow$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(e_0 - e_0 \cdot e^{-sT})}{s^2 + \left(R/_L\right)s + \frac{1}{LC}}\right\} \qquad (7)$$

Há três casos de soluções possíveis para (7):

a) O caso oscilatório, $\omega^2 > 0$, a inversa de $I(s)$, será:

$$i(t) = \frac{e_0}{\omega L}e^{-\propto t} \cdot sen\ \omega t - \frac{e_0}{\omega L}e^{-\propto(t-T)} \cdot sen\ \omega(t-T) \cdot s(t-T)$$

b) O caso super amortecido $\omega^2 < 0$, ou seja, $\omega^2 = -\beta^2$ e substituindo ω por $i\beta$ na fórmula acima, vem:

$$i(t) = \frac{e_0}{\beta L}e^{-\propto t} \cdot senh\ \beta t - \frac{e_0}{\beta L}e^{-\propto(t-T)} \cdot senh\ \beta(t-T) \cdot s(t-T)$$

c) O caso criticamente amortecido, $\omega^2 = 0$, a transformada será:

$$I(s) = \frac{e_0}{L} \cdot \frac{(1 - e^{-sT})}{\left(s + \left(R/_{2L}\right)\right)^2}$$

De maneira que a corrente eléctrica que flui no circuito é dada por:

$$i(t) = \frac{e_0}{L}te^{-\propto t} - \frac{e_0}{L}(t-T)e^{-\propto(t-T)} \cdot s(t-T)$$

Conclusões

A Transformada de Laplace constitui um dos métodos matemáticos mais confortáveis e integrais na análise e resolução dos circuitos eléctricos complexos;

O domínio da Transformada de Laplace proporciona, aos estudantes do 4.º ano, do Curso de Licenciatura em Ensino da Física, no ISCED-Huíla, capacidades de modelar matematicamente determinados fenómenos físicos cujos parâmetros que os descrevem são todos fenómenos dinâmicos;

É de suma importância que os estudantes do Curso de Licenciatura em Ensino da Física, no ISCED-Huíla, alarguem e consolidem o seu leque de conhecimentos matemáticos para o estudo, compreensão, interpretação e explicação de certos fenómenos físicos.

Referências bibliográficas

Butkov, E, (1988). Física Matemática.

Mayer, J. (2015). Notas de Aulas de Física Matemática para o 4.º Ano do Curso de Ensino da Física do ISCED - HUÍLA. Angola.

Pacheco, S, (2011). Transformada de Laplace: Algumas aplicações. Monografia submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau de Especialista em Matemática.

Rezende, B, (2013). Notas de Aula do Cálculo III - Definição e cálculo da transformada de Laplace. Parte 1.

Silva, J, (2013). Notas de Aula: A Transformada de Laplace.

Sodré, U, (2013). Transformadas de Laplace. Notas de aulas para Computação, Engenharia Eléctrica e Engenharia Civil - material compilado no dia 6 de Maio de 2003.

Tonidandel, V & Araújo, A, (2012). Transformada de Laplace: uma obra de engenharia

Young & Fridman. (2008). Física III. Electromagnetismo. 12.ª Edição.

Recebido em 05 de Agosto de 2020
Aceite em 07 de Outubro de 2021