

O tratamento de séries para o asseguramento das somas de Riemann

The Treatment of Series for the Verification of Riemann Sums

El Tratamiento de Series para el Aseguramiento de las Sumas de Riemann

Boaventura Beleza dos Santos Nolasco¹

Instituto Superior de Ciências da Educação da Huíla, Angola

boaventura.nolasco@isced-huila.edu.ao

Resumo

A abordagem sobre o tratamento das séries da forma $\sum_{i=1}^n x^i$ surge pela necessidade de que os estudantes do 1º Ano dos cursos em Ensino e Investigação de Matemática, Física e Química do Instituto Superior de Ciências da Educação da Huíla, têm dificuldades em desenvolvê-la para assegurar o cálculo de áreas pelas somas de Riemann, $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ e compará-la com a área delimitada pela curva $y = f(x)$ e o eixo dos XX , no intervalo $[a, b]$, designada por;

Maiúscula $A = \int_a^b f(x) dx$. O objectivo da pesquisa visa elaborar elementos como as séries da forma $\sum_{i=1}^n x^n$, de garantir o asseguramento do tratamento das somas de Riemann. A pesquisa é do tipo descritivo, com pendor qualitativo, pelo facto de incidir sobre revisão documental e exploração de dados informais resultantes da interacção entre docentes e discentes. As informações garantiram a falta de abordagem do tipo de séries, o que dificulta o tratamento das somas de Riemann e sua evolução para o Método da Exaustão. Neste contexto, impõe-se uma Didáctica da Matemática que postula o princípio da sistematicidade lógica e sequencial de conteúdos onde se pode abordar; i) As somas das séries da forma $\sum_{i=1}^n x^i$, ii) O cálculo de áreas pelas somas de Riemann e iii) O Cálculo de áreas pelo método da exaustão. Desta feita, o artigo faz inicialmente uma abordagem acerca das somas de n primeiros termos de séries; aritmética, de quadrados de termos, de cubos de termos e assim sucessivamente.

Palavras-chave: Asseguramento, Séries, Somas de Riemann.

Abstract

The approach to the treatment of series of the form arises from the need for students in the 1st year of the programs in Mathematics, Physics, and Chemistry Education and Research at the Higher Institute of Educational Sciences of Huíla, who have difficulties in developing it in order to ensure the calculation of areas by means of Riemann sums, $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$, and comparing it with the area bounded by the curve $y = f(x)$ and the XX axis, in the interval $[a, b]$. The research aims is to develop elements such as series of the form $\sum_{i=1}^n x^i$, in order to ensure the treatment of Riemann sums. The research is descriptive, with a qualitative approach, since it focuses on documentary review and the exploration of informal data resulting from interaction between teachers and students. The information confirmed the lack of an approach to this type of series, which makes it difficult to deal with Riemann sums and their evolution

¹ Doutor em Geometria Diferencial pela Universidade da Beira Interior. Docente do Instituto Superior de Ciências da Educação da Huíla.

into the Exhaustion Method. In this context, a Didactics of Mathematics is required that postulates the principle of logical and sequential systematicity of contents, where the following may be addressed: i) sums of series of the form $\sum_{i=1}^n x_i$, ii) the calculation of areas by Riemann sums, and iii) the calculation of areas by the method of exhaustion. Thus, the article initially addresses the sums of the first n terms of series: arithmetic, squares of terms, cubes of terms, and so on.^[1]

Keywords: Assurance, Series, Riemann sums.

Resumen

El enfoque sobre el tratamiento de las series de la forma surge por la necesidad de que los estudiantes del 1.º año de las carreras de Enseñanza e Investigación de Matemática, Física y Química del Instituto Superior de Ciencias de la Educación de Huíla tengan dificultades para desarrollarla con el fin de asegurar el cálculo de áreas mediante sumas de Riemann, $\mathcal{E}A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$, y compararla con el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y el eje XX , en el intervalo $[a, b]$, designada por $A = \int_a^b f(x) dx$. El objetivo de la investigación es elaborar elementos como las series de la forma $\sum_{i=1}^n x^i$, para garantizar el tratamiento de las sumas de Riemann. La investigación es de tipo descriptivo, con enfoque cualitativo, por incidir sobre la revisión documental y la exploración de datos informales resultantes de la interacción entre docentes y discentes. La información confirmó la falta de abordaje de este tipo de series, lo que dificulta el tratamiento de las sumas de Riemann y su evolución hacia el Método de Agotamiento. En este contexto, se impone una Didáctica de la Matemática que postule el principio de sistematicidad lógica y secuencial de los contenidos, donde se puede abordar: i) las sumas de series de la forma $\sum_{i=1}^n x_i$, ii) el cálculo de áreas mediante las sumas de Riemann y iii) el cálculo de áreas por el método de agotamiento. De este modo, el artículo aborda inicialmente las sumas de los primeros n términos de series: aritméticas, de cuadrados de términos, de cubos de términos y así sucesivamente.^[1]

Palabras clave: Aseguramiento, Series, Sumas de Riemann.

Introdução

Esta secção visa apresentar os elementos do asseguramento do nível de partida na abordagem do conteúdo, Somas de Riemann, aqueles que vão servir de suporte ao tratamento das referidas somas.

A preocupação prende-se com o facto de terem sido constatadas dificuldades da parte dos estudantes em relação ao conhecimento acerca da soma de n primeiros termos de uma série, partindo de estudos feitos ao nível de sucessões: aritmética, geométrica, geométrico-aritmética e outras. A nível do ISCED-Huíla, as unidades curriculares de Análise Matemática I e II são dadas no 1º ano dos cursos de Ensino e Investigação de Matemática, Física, Informática-Educativa e de Química. Entre os conteúdos programáticos da disciplina consta o conteúdo programático sobre o “Cálculo de áreas pelo Método da Exaustão”.

A questão fundamental da nossa investigação prende-se com o facto de os conteúdos sobre as somas de Riemann não estarem integrados no programa das cadeiras em referência, uma vez que constituem um grande suporte ao cálculo de áreas pela integração.

As somas de Riemann implicam o tratamento de séries para daí deduzir-se o termo geral da soma de n primeiros termos, para ser aplicado na soma de Riemann. Neste sentido, consideramos que as somas de Riemann devem servir de base ao cálculo de áreas. Em termos sequenciais nos programas curriculares, consideramos que o cálculo de áreas deve ser dado a *posteriori* às somas de Riemann, pois tem a função de confirmar o resultado das somas de Riemann.

O tratamento de séries e suas demonstrações constitui uma boa base de asseguramento do nível de partida para a ministração das somas de Riemann e estas como base no cálculo de áreas por integração.

Construção de saberes

O processo de ensino e aprendizagem é actualmente caracterizado pelo sistema de construção de saberes, uma vez que pressupõe a interacção dos intervenientes no processo docente-educativo, com o intuito de se garantir a transmissão e assimilação de conhecimento por parte do docente e estudante, respectivamente.

A construção de saberes refere-se ao enfoque de Piaget, citado por Nolasco (2009), que diz que o conhecimento resulta da simbiose entre a corrente racionalista e a corrente empirista. Este processo resulta da questão de que os racionalistas julgavam que a razão por si só produzia conhecimentos e o método da ciência era o dedutivo, enquanto que os empiristas defendiam o argumento de que o conhecimento era resultado da experiência e o método da ciência era o indutivo. Destas posições antagónicas, Piaget investigou pormenorizadamente e chegou a conclusão de que nem a primeira e nem a segunda, mas sim a fusão das duas correntes; a corrente racionalista e a corrente

empirista.

O enfoque de Piaget, encoraja o pesquisador a pautar por;

- i) Tratamento de séries da forma $\sum_{i=1}^n x^i$,
- ii) Tratamento das somas de Riemann no cálculo de áreas, formadas pela curva $y = f(x)$ e pelo eixo dos XX e
- iii) Tratamento do cálculo de áreas pela integração.

Os itens anteriores manifestam os eixos temáticos que devem ser desenvolvidos desde as séries, passando pelas somas de Riemann até ao cálculo de áreas pela integração. Este processo evidencia a construção de conhecimentos que se faz de forma escalonada.

O estudo de séries, parte do estudo de sucessões cuja disposição de termos é dada por;

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-3}, u_{n-2}, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, \dots$$

Esta sucessão de termos infinitos mostra que os estudantes antes de se referirem a ela devem mostrar o domínio da teoria de conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais), para terem a noção geral da progressão dos termos, para além de outras operações envolvidas, no tratamento de sucessões.

De sucessões, pode-se obter a série S , cuja notação é:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-3} + u_{n-2} + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$$

A soma anterior também pode ser expressa em;

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-2} + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

Por uma questão de orientação pedagógica, é importante referir que em alguns manuais utiliza-se a notação de índice i , No somatório, isto é:

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-2} + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$$

Não obstante apenas a soma S , é necessário que os alunos tenham o domínio da soma dos primeiros termos da série, isto é, a soma que vai desde o primeiro termo (u_1) até ao n -ésimo termo (u_n .) Matematicamente, escreve-se:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-2} + u_n = \sum_{i=1}^n u_i$$

A soma de n primeiros termos é tão importante porque gera a natureza da soma infinita de termos (S), se é convergente ou divergente. Para tal, obedece à fórmula;

Maiúscula S é igual a limite como n até a infinito de maiúscula S inferior à linha nS

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a$$

Se for real, a série S é convergente.

Se for $\pm\infty$, a série S é convergente.

Algumas propriedades de séries, para todo e qualquer $k \in N$, $i \in N$ e $n \in N$:

- 1) $\sum_{i=1}^n k = kn$
- 2) $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$
- 3) $\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$
- 4) $\sum_{i=1}^n a_i = a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$

Tratamento de algumas séries

O tratamento de séries que levamos a cabo parte dos termos de uma dada sucessão U_n , cuja soma dos mesmos venha garantir um termo geral da referida soma. Assim, as sucessões que conduzem às séries, a estudar, são de natureza diversificada onde se constata sucessões; aritméticas, geométricas, geométrico-aritméticas e outras com especificidade de tratamento próprio.

Neste contexto, aferem-se as seguintes definições:

Definição 1: Sucessão — é toda a sequência de termos que obedece uma certa ordem e denota-se por;

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, \dots \quad (1)$$

Desta sucessão identifica-se o termo geral u_n ou seja o termo de ordem n ou ainda o n -ésimo termo, segundo Nolasco (2019).

Definição 2: Série é a soma infinita de termos de uma dada sucessão, segundo Nolasco (2019). Denota-se por;

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (2)$$

,Da relação (2), pode-se deduzir a soma de n primeiros termos que se denota por S_n , que garante a soma desde o primeiro termo u_1 até ao n -ésimo termo u_n , isto é,

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n = \sum_{n=1}^n u_n \quad (3)$$

Séries de diferentes sucessões e suas demonstrações

Pretende-se abordar séries de progressões aritméticas e geométricas, séries geométrico-aritméticas e outras com especificidade própria.

Definição 3: Série aritmética — é toda a soma infinita de termos de uma progressão aritmética. Denota-se por:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (4)$$

Como a progressão aritmética é dada por disposição de termos em que a diferença entre um termo qualquer e o seu precedente é constante, a relação (4) toma a forma:

$$S = u_1 + (u_1 + r) + (u_1 + 2r) + \dots + (u_1 + (n-2)r) + (u_1 + (n-1)r) + (u_1 + nr) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (5).$$

Da relação (5), pode-se deduzir que o termo geral da progressão aritmética é:

$$u_n = u_1 + (n-1)r, \text{ sendo } r, \text{ a razão da referida progressão.}$$

Tencionando fazer uma restrição para a soma de n primeiros termos, a relação (4) transforma-se em:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n = \sum_{n=1}^n u_n$$

Assumindo a forma da relação (5), tem-se:

$$S_n = u_1 + (u_1 + r) + (u_1 + 2r) + \dots + (u_1 + (n-2)r) + (u_1 + (n-1)r) = \sum_{n=1}^n u_n \quad (6).$$

Da relação (6), se pode demonstrar que a soma de n primeiros termos de uma progressão aritmética é:

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$$

Sendo a relação (6) da soma de n primeiros termos da progressão aritmética tem-se;

$$S_n = u_1 + (u_1 + r) + (u_1 + 2r) + \dots + (u_1 + (n-3)r) + (u_1 + (n-2)r) + (u_1 + (n-1)r) \quad (7)$$

Invertendo a ordem das parcelas da relação anterior, vem:

$$S_n = (u_1 + (n-1)r) + (u_1 + (n-2)r) + (u_1 + (n-3)r) \dots + (u_1 + 2r) + (u_1 + r) + u_1 \quad (8)$$

Procedendo a soma de (7) e (8) vem:

$$S_n + S_n = [(u_1 + (n-1)r) + u_1] + [(u_1 + (n-2)r) + (u_1 + r)] + [(u_1 + (n-3)r) + u_1 + 2r] + \dots + [(u_1 + (n-3)r) + u_1 + 2r] + [(u_1 + (n-2)r) + u_1 + r] + [(u_1 + (n-1)r) + u_1].$$

É sabido que a soma de termos equidistantes é igual à soma dos extremos na progressão aritmética.

$$2S_n = (2u_1 + (n-1)r) + (2u_1 + (n-1)r) + (2u_1 + (n-1)r) + \dots + (2u_1 + (n-1)r) + (2u_1 + (n-1)r) + (2u_1 + (n-1)r)$$

Como se tem n parcelas de $(2u_1 + (n-1)r)$, a soma anterior toma a forma:

$$2S_n = (2u_1 + (n-1)r)n \Rightarrow S_n = \frac{(2u_1 + (n-1)r)n}{2}$$

Sabendo que $u_n = u_1 + (n-1)r \Rightarrow (n-1)r = u_n - u_1$, a relação anterior escreve-se:

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} \quad (9)$$

Como se pretendia demonstrar.

das parcelas convertidas em produtos de dois factores, os primeiros factores estão em progressão aritmética, de termo geral n , e os segundos factores estão em progressão geométrica de termo geral q^n .

Apresentação de séries na forma $\sum_{i=1}^n x^i$

Parte-se da série aritmética;

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

A soma de n primeiros termos calcula-se pela fórmula ;

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} = \frac{n(1 + n)}{2}$$

Desta feita confirma-se o resultado obtido.

$$a) S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2.$$

Segundo Cardoso, Szymánski & Rostami (2009), tem-se:

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 5$$

$$s_3 = 14$$

.....

.....

.....

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Multiplicando as três primeiras somas parciais por 6, vem:

$$6s_1 = 6 = 1.2.3$$

$$6s_2 = 30 = 2.3.5$$

$$6s_3 = 84 = 3.4.7$$

.....

.....

.....

$$\text{Inferior } 6S_n = n.(n + 1)(2n + 1)$$

Das primeiras somas parciais multiplicadas por 6, os produtos de três factores são tais que os primeiros factores estão em progressão aritmética de termo geral n , os segundos factores estão em progressão aritmética de termo geral $n + 1$ e os terceiros factores

estão em progressão aritmética de termo geral $2n + 1$, segundo Cardoso, Szymánski & Rostami (2009). Este processo justifica o produto de 6 pela soma de n primeiros termos que se consubstancia por:

$$\text{Inferior } 6S_n = n \cdot (n + 1)(2n + 1) \Rightarrow S_n = \frac{1}{6}n \cdot (n + 1)(2n + 1)$$

$$\text{b) } S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n^3$$

A soma de n primeiros termos vai ser obtida pelas somas parciais,

$$s_1 = 1 = 1^2$$

$$s_2 = 9 = 3^2$$

$$s_3 = 36 = 6^2$$

.....

.....

.....

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

Sendo as somas parciais, os quadrados das somas parciais de

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n,$$

cujas somas, de n primeiros termos é ;

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} = \frac{n(1+n)}{2}.$$

A referida soma de n primeiros termos assume a condição, (Cardoso, Szymánski & Rostami;2009);

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(1+n)}{2} \right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\text{c) } S_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n^4$$

Desta série, a soma de n primeiros termos é dada por (Leithold, 1994).

$$S_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

Outras formas de demonstrações de somas de n primeiros termos de potências

1) Demonstração da soma de n primeiros termos de números naturais

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Partamos de potências de expoente dois, na segunda parcela.

$$(1 + 1)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1$$

$$(2 + 1)^2 = 2^2 + 2.2.1 + 1$$

$$(3 + 1)^2 = 3^2 + 2.3.1 + 1$$

$$(4 + 1)^2 = 4^2 + 2.4.1 + 1$$

⋮

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2.n.1 + 1$$

Somando membro a membro vem:

$$2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 + (n + 1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2) + \\ + 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) + (1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1)$$

Simplificando os termos do Membro Esquerdo com os da primeira parcela do Membro Direito, vem:

$$2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 + (n + 1)^2 - 1^2 - 2^2 - 3^2 - 4^2 - \dots - n^2 = \\ + 2S_n + (1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1)$$

Sendo; $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = 2S_n$ e $1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n$

$$(n + 1)^2 - 1 = 2S_n + n \\ n^2 + 2n + 1 - 1 - n = 2S_n \\ S_n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

Demonstração da soma de n primeiros termos quadrados

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$$

Partamos de potências de expoente três, na segunda parcela.

$$(1 + 1)^3 = 1^3 + 3.1^2.1 + 3.1.1 + 1(2 + 1)^3 = 2^3 + 3.2^2.1 + 3.2.1 + 1$$

$$(2 + 1)^3 = 2^3 + 3.2^2.1 + 3.2.1 + 1$$

$$(3 + 1)^3 = 3^3 + 3.3^2.1 + 3.3.1 + 1$$

$$Abre(4 + 1)^3 = 4^3 + 3.4^2.1 + 3.4.1 + 1$$

⋮

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3.n^2.1 + 3.n.1 + 1$$

Somando membro a membro vem:

$$2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 + (n + 1)^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3) + \\ + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (1 + 1 + 1 + \dots + 1)$$

Passando a primeira parcela para o membro esquerdo e sendo,

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$$

vem:

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_n + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

Multiplicando a relação anterior por 2, vem:

$$\begin{aligned} 2(n+1)^3 &= 2 + 6S_n + 3n(n+1) + 2n \\ 2(n+1)^3 &= 6S_n + 3n(n+1) + 2(n+1) \\ 2(n+1)^3 &= 6S_n + (n+1)(3n+2) \\ 6S_n &= 2(n+1)^3 - (n+1)(3n+2) \\ 6S_n &= (n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2) \\ S_n &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

Demonstração da soma de n primeiros termos ao cubo

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3$$

Partamos de potências de expoente quatro, na segunda parcela.

$$\begin{aligned} 6,1(1+1)^4 &= 1^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \\ 6,2(2+1)^4 &= 2^4 + 4 \cdot 2^3 \cdot 1 + 6 \cdot 2^2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \\ 6,3(3+1)^4 &= 3^4 + 4 \cdot 3^3 \cdot 1 + 6 \cdot 3^2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \\ 6,4(4+1)^4 &= 4^4 + 4 \cdot 4^3 \cdot 1 + 6 \cdot 4^2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \\ &\vdots \\ (n+1)^4 &= n^4 + 4 \cdot n^3 \cdot 1 + 6 \cdot n^2 \cdot 1 + 4n \cdot 1 + 1 \end{aligned}$$

Somando membro a membro e passando a primeira parcela do membro direito para o esquerdo, vem:

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_n + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$$

Tendo em consideração que;

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

vem:

$$(n+1)^4 - 1 - n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) = 4S_n$$

$$(n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) = 4S_n$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(n+1)[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1]}{4} \\ S_n &= \frac{(n+1)^2[(n+1)^2 - (2n+1)]}{4} \\ S_n &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

Demonstração da soma de n primeiros termos de potências de expoente quatro

$$S_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + n^4$$

Partamos de potências de expoente cinco,

$$10,1(1 + 1)^5 = 1^5 + 5 \cdot 1^4 \cdot 1 + 10 \cdot 1^3 \cdot 1 + 10 \cdot 1^2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 1 + 1$$

$$(2 + 1)^5 = 2^5 + 5 \cdot 2^4 \cdot 1 + 10 \cdot 2^3 \cdot 1 + 10 \cdot 2^2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 1 + 1$$

$$(3 + 1)^5 = 3^5 + 5 \cdot 3^4 \cdot 1 + 10 \cdot 3^3 \cdot 1 + 10 \cdot 3^2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 1 + 1$$

$$(4 + 1)^5 = 4^5 + 5 \cdot 4^4 \cdot 1 + 10 \cdot 4^3 \cdot 1 + 10 \cdot 4^2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 1 + 1$$

⋮

$$(n + 1)^5 = n^5 + 5 \cdot n^4 \cdot 1 + 10 \cdot n^3 \cdot 1 + 10 \cdot n^2 \cdot 1 + 5 \cdot n \cdot 1 + 1$$

Passando a primeira parcela do membro direito para o esquerdo vem:

$$2^5 + 3^5 + 4^5 + \dots + n^5 + (n + 1)^5 = (1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + \dots + n^5) + 5S_n +$$

$$10(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 10(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 5(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (1 + 1 + 1 + \dots + 1)$$

$$(n + 1)^5 = 1 + 5S_n + \frac{5}{2}n^2(n + 1)^2 + \frac{5}{3}n(n + 1)(2n + 1) + \frac{5}{2}n(n + 1) + n$$

$$6(n + 1)^5 = 6 + 30S_n + 15n^2(n + 1)^2 + 10n(n + 1)(2n + 1) + 15n(n + 1) + 6n$$

$$30S_n = 6(n + 1)^5 - (n + 1)[15n^2(n + 1) + 10n(2n + 1) + 15n + 6]$$

$$30S_n = (n + 1)[6(n + 1)^4 - (15n^3 + 15n^2 + 20n^2 + 10n + 15n + 6)]$$

$$30S_n = (n + 1)[6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 15n^3 - 35n^2 - 25n - 6]$$

$$S_n = \frac{1}{30}n(n + 1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$$

Assim , sucessivamente o processo segue para outras potências de expoentes maiores que quatro.

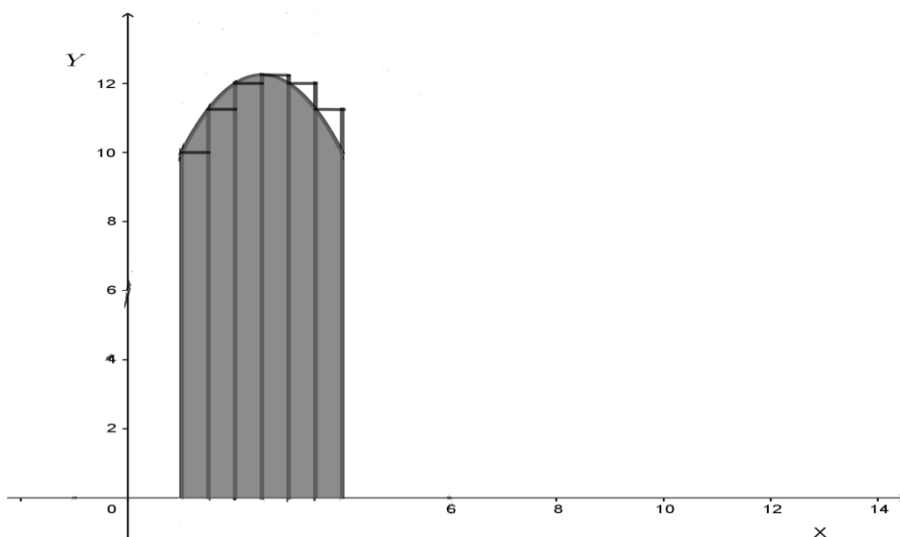
Somas de Riemann

Para se efectuar as somas de Riemann, no cálculo de áreas, deve-se ter de antemão a noção de partição de um dado intervalo, a noção de resolução de limites pelo facto de que, se a partição do intervalo for feita por número n suficientemente grande, com n até a infinito, aplica-se a noção do limite.

O processo de partição do intervalo $[a, b]$ por n subintervalos iguais garante um conjunto de rectângulos abaixo da curva ou acima da curva com o eixo dos XX , tendo cada rectângulo por base Δx e altura $f(x_i)$, perfazendo uma área de; $\Delta x \cdot f(x_i)$.

A soma das áreas dos referidos rectângulos por baixo da curva ou acima de $y = f(x)$, no intervalo $[a, b]$, converge a área formada pela curva e pelo eixo dos XX no referido intervalo, isto é, a área resultante dos rectângulos pode ser maior ou menor, conforme se encontre um pouco acima ou abaixo da curva, respectivamente. Neste sentido, a área é aproximada da curva.

Para se visualizar a área formada pelos rectângulos, apresenta-se o gráfico abaixo, manifestando a área formada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo dos XX , no intervalo $[a, b]$.



menos 1 fim de inferior à linha, x inferior à linha i, fecha parêntese reto .

Então,, abre Definição 5: Suponha que a função seja contínua no intervalo $[a, b]$ com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ e seja R a região limitada pela curva $f(x)$ e pelo eixo dos XX e as rectas $x = a$ e $x = b$. Do intervalo $[a, b]$, particione-se em n subintervalos iguais de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Denote-se o i -ésimo subintervalo por $[x_{i-1}, x_i]$. Então a medida da área da região R é dada por:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad x_i = a + i\Delta x, \text{ segundo Leithold (1994).}$$

Da definição quando se conhece numericamente o valor de n dada uma região limitada

para a curva $y = f(x)$ em $[a, b]$, pode-se de imediato se calcular a soma de Riemann sem passar por limite.

Por exemplo: 1- Dada a função limitada por $f(x) = 1$ em $[0, 2]$, $n = 4$ e pelo eixo dos XX , determine a soma de Riemann.

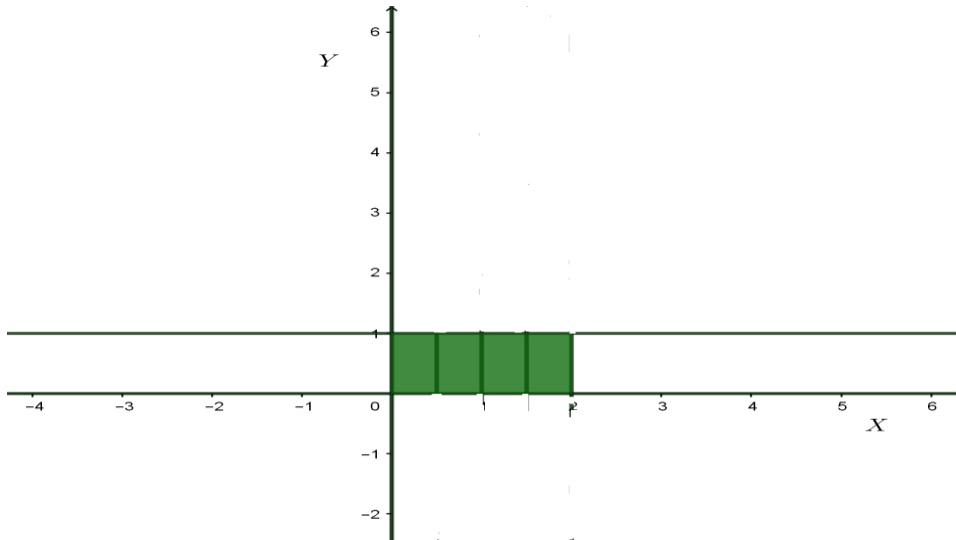


Figura 3: Divisões da área em 4 rectângulos.

A área é determinada da seguinte forma; $A = \sum_{i=1}^4 R_i = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ Maiúscula $R_i = f(x_i) \cdot \Delta x$, $\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$, $x_i = 0 + i\Delta x$ e $f(x_i) = 1$

$$R_1 = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, R_2 = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, R_3 = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ e } R_4 = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A = R = \sum_{i=1}^4 R_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2u^2 (u^2: \text{unidades de área})$$

Pela integração ter-se-ia:

$$R = \int_0^2 1 dx = (x)_0^2 = 2u^2$$

A resolução pela integração confirma a soma de Riemann.

2-Determine a área, pela soma de Riemann, limitada por;

$f(x) = x + 1$ no intervalo $[1, 2]$.

Os subintervalos, em pontos x_i , são dados pelo tamanho: $\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$, $x_i = a + i\Delta x =$

$$1 + \frac{i}{n} = \frac{n+i}{n}, f\left(\frac{n+i}{n}\right) = \frac{n+i}{n} + 1 = \frac{2n+i}{n}.$$

Assim área é dada por: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2n+i}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} =$

$$\sum_{i=1}^n (2n + i) = \left(\sum_{i=1}^n 2n + \sum_{i=1}^n i \right)$$

$$\sum_{i=1}^n 2n = 2n \sum_{i=1}^n 1 = 2n(1 + 1 + 1 + \dots + 1) = 2n^2$$

$$SomaSoma \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n \cdot (n + 1)$$

$$\left[2n \sum_{i=1}^n 1 + (1 + 2 + 3 + \dots + n) \right]$$

$$[(1 + 1 + 1 + \dots + 1) + (1 + 2 + 3 + \dots + n)]$$

$$\sum_{i=1}^n (2n + i) = \left[2n^2 + \frac{(n + 1)n}{2} \right] = \frac{5n^2 + n}{2}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2n + i}{n} \right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n}{2n^2} = \frac{5}{2} u^2$$

Pela resolução via integral tem-se:

$$A = \int_1^2 (x + 1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right)_1^2 = 2 + 2 - \frac{1}{2} - 1 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} u^2$$

Assim, vê-se o confirmar de operações.

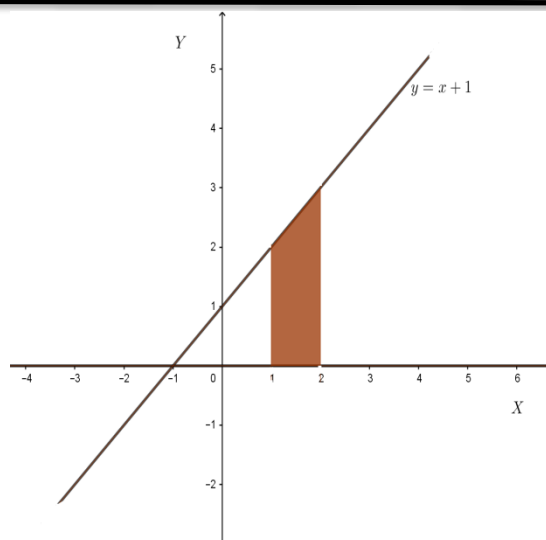


Figura 4: Gráfico da área limitada por $y = 0, y = x + 1$, em $[1, 2]$.

Desta feita, acede-se a um conjunto de exercícios, pelas somas de Riemann, nos intervalos expressos com as suas respectivas linhas de limitação que fazem as regiões. Determine as somas de Riemann, delineadas pelas regiões abaixo nos seus respectivos intervalos:

a) $f(x) = x^2$, $[1, 2]$ e pelo eixo dos XX em $[1, 2]$

b) $f(x) = x^3$, $[1, 2]$ e pelo eixo dos XX em $[1, 2]$

) $f(x) = x^4$, $[1, 2]$ e pelo eixo dos XX em $[1, 2]$

Para a) vem: $\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$, $x_i = a + i\Delta x = 1 + \frac{i}{n} = \frac{n+i}{n}$

$$f\left(\frac{n+i}{n}\right) = \frac{n^2 + 2in + i^2}{n^2}$$

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{n^2 + 2in + i^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 + 2in + i^2)$$

$$\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 + 2in + i^2) = \frac{1}{n^3} \left(n^2 \sum_{i=1}^n 1 + 2n \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n i^2 \right)$$

$$\frac{1}{n^3} \left[n^2 \sum_{i=1}^n 1 + 2n \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n i^2 \right]$$

$$\frac{1}{n^3} [n^2(1 + 1 + 1 + \dots + 1) + 2n(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)]$$

e-se que; $1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ e $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 =$

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \frac{1}{n^3} \left[n^2 \cdot n + 2n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{n^3 + n^2}{n^3} + \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \right] = 1 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} u^2$$

Pela integração vem:

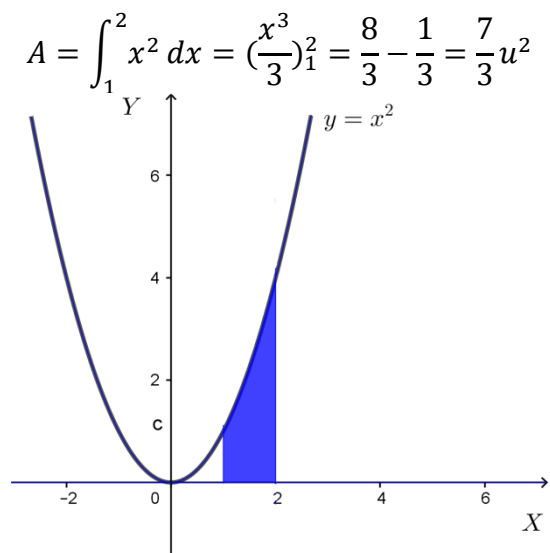


Figura 5: Gráfico da área limitada por $y = 0$ e $y = x^2$ em $[1,2]$.

Para b) vem: $\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$, $x_i = a + i\Delta x = 1 + \frac{i}{n} = \frac{n+i}{n}$

$$f\left(\frac{n+i}{n}\right) = \frac{n^3 + 3in^2 + 3i^2n + i^3}{n^3}$$

$$\frac{1}{n^4} \left[n^3 \sum_{i=1}^n 1 + 3n^2 \sum_{i=1}^n i + 3n \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i^3 \right]$$

Parcialmente têm-se as seguintes resoluções:

$$\sum_{i=1}^n 1 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

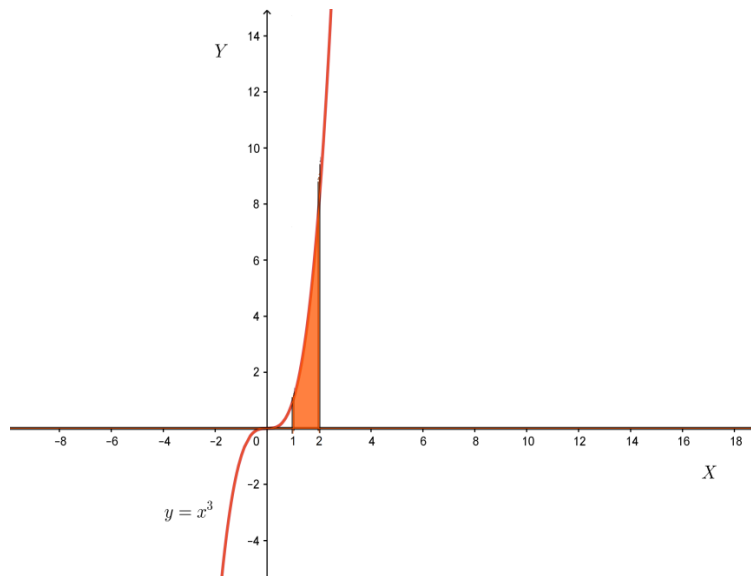
$$\frac{1}{n^4} \left[n^3 \cdot n + 3n^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 3n \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \left[n^4 + \frac{3n^4 + 3n^3}{2} + \frac{2n^4 + 3n^3 + n^2}{2} + \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \right]$$

$$É = 1 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{15}{4} u^2$$

Pela integração vem:

$$A = \int_1^2 x^3 dx = \left(\frac{x^4}{4} \right)_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} u^2.$$



Figua 6: Gráfico da área limitada por $y = 0$ e $y = x^3$ em $[1,2]$.

Para c) vem: $\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$, $x_i = a + i\Delta x = 1 + \frac{i}{n} = \frac{n+i}{n}$

$$f\left(\frac{n+i}{n}\right) = \frac{n^4 + 4in^3 + 6n^2i^2 + 4i^3n + i^4}{n^4}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n^4 + 4in^3 + 6n^2i^2 + 4i^3n + i^4}{n^4} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{i=1}^n (n^4 + 4in^3 + 6n^2i^2 + 4i^3n + i^4)$$

Fazendo as somas parciais, vem:

$$\sum_{i=1}^n 1 + 4n^3 \sum_{i=1}^n i + 6n^2 \sum_{i=1}^n i^2 + 4n \sum_{i=1}^n i^3 + \sum_{i=1}^n i^4$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^n i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} \sum_{i=1}^n (n^4 + 4in^3 + 6n^2i^2 + 4i^3n + i^4)$$

$$A = 1 + 2 + 2 + 1 + \frac{1}{5} = \frac{31}{5} u^2$$

Por via de integração tem-se: $A = \int_1^2 x^4 dx = \left(\frac{x^5}{5} \right)_1^2 = \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5} u^2$.

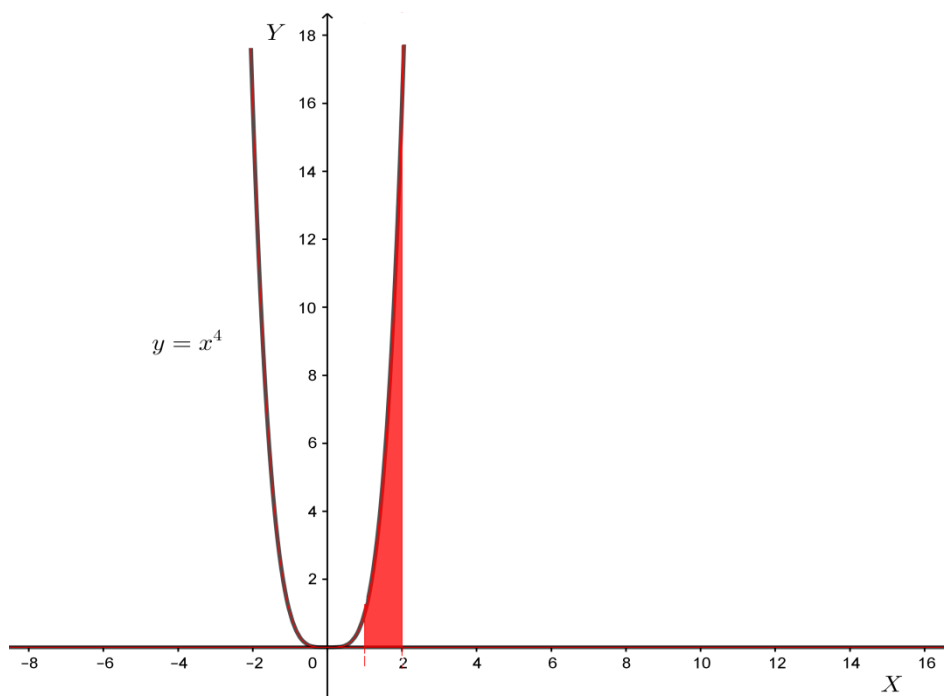


Figura 7 gráfico da área limitada por $y = 0$ e $y = x^4$ em $[1, 2]$.

A seguir, vai-se garantir o tratamento de regiões limitadas não necessariamente, pela curva $y = f(x)$ e pelo eixo dos XX mas sim, pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ no intervalo $[a, b]$. Desta maneira, segue-se a ordem dos exercícios anteriores, achando as soma de Riemann limitadas pelas condições expressas:

d) $f(x) = 1, g(x) = x^2$

e) $f(x) \leq x + 1, g(x) \geq x^2$ e $h(x) \leq 1 - x$

Para d) tem-se o gráfico:

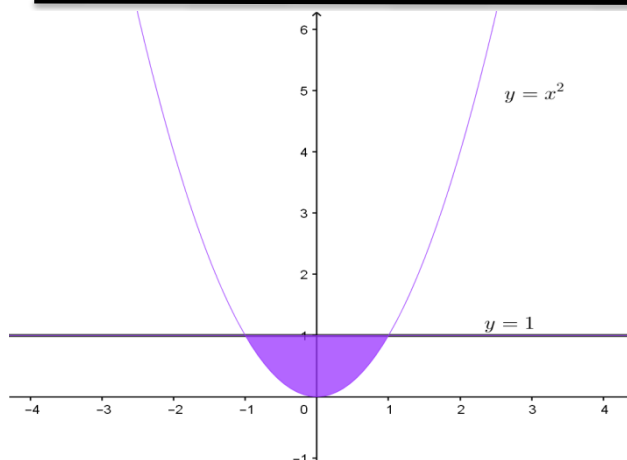


Figura 8: gráfico de área limitada por $y = 1$ e $y = x^2$.

Para d) vem: $\Delta x = \frac{1+1}{n} = \frac{2}{n}$, $x_i = a + i\Delta x = -1 + \frac{2i}{n} = \frac{2i-n}{n}$

Quanto à função $f(x) = 1$, tem-se:

$$f\left(\frac{2i-n}{n}\right) = 1$$

$$g\left(\frac{2i-n}{n}\right) = \frac{4i^2 - 4in + n^2}{n^2}$$

Como a área é limitada superiormente pela recta $f(x) = 1$ e inferiormente pela curva $g(x) = x^2$, no intervalo obtido por:

$$\begin{cases} y=1 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Deste sistema obteve-se dois pontos $(-1,1)$ e $(1,1)$, o intervalo da área que se pretende calcular é: $[-1,1]$.

Assim, pelas somas de Riemann, a área limitada por duas curvas vem expressa:

$$MaiúsculaA = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x - \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot \Delta x \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n 1 \cdot \frac{2}{n} - \sum_{i=1}^n \frac{4i^2 - 4in + n^2}{n^2} \cdot \frac{2}{n} \right)$$

$$A = 2 - \frac{8}{3} + 4 - 2 = \frac{4}{3} u^2 (\text{unidades de área})$$

Pelo processo de integração vem;

$$A = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right)_{-1}^1 = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} u^2 (\text{unidades de área})$$

Assim confirma-se o resultado.

Para e), tem-se o gráfico:

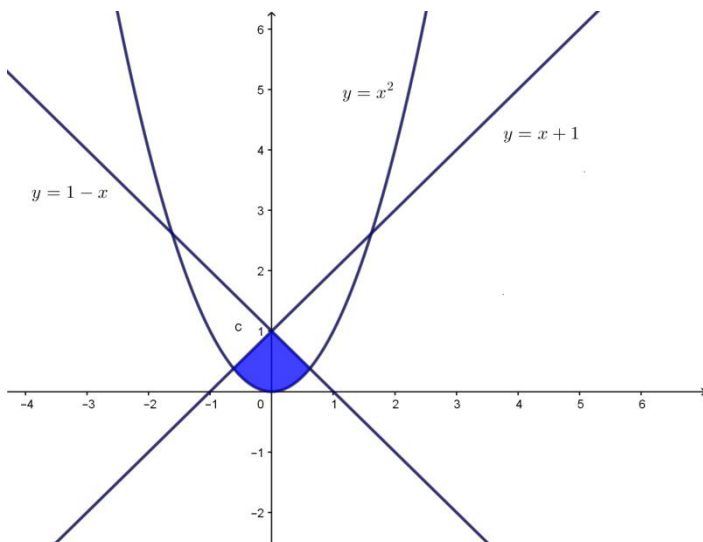


Figura 9: Gráfico da área limitada pelas regiões $f(x) \leq x + 1$, $g(x) \geq x^2$ e $h(x) \leq 1 - x$

Deve-se, de imediato, determinar os pontos de interseção entre as funções, tal como se apresentam os sistemas.

$$\text{I) } \begin{cases} f(x) = x + 1 \\ g(x) = x^2 \end{cases}, \quad \text{II) } \begin{cases} f(x) = x + 1 \\ h(x) = 1 - x \end{cases} \text{ e III) } \begin{cases} h(x) = 1 - x \\ g(x) = x^2 \end{cases}$$

Resolvendo o primeiro sistema (I), tem-se:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 5, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Para $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

De acordo com a figura 9, no segundo quadrante $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Como a área é limitada superiormente por duas curvas diferentes, recorremos ao sistema II) para determinar o valor de x na intersecção entre elas:

$$x + 1 = 1 - x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 1$$

Também, resolve-se já o sistema III) $x^2 = 1 - x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 5$, $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Como o valor de x é do primeiro quadrante vem: $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $y = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Assim, deve-se fragmentar o domínio: $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

Analisa-se o cálculo das somas de Riemann parcialmente, para o primeiro caso vem o intervalo; $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right]$.

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{\sqrt{5}-1}{2n}, \quad x_i = a + i\Delta x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2n}i \\ f(x_i) &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2n}i + 1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2n}i \\ g(x_i) &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2n}i\right)^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2n}i\right) + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2n}i\right)^2 \\ g(x_i) &= \frac{6-2\sqrt{5}}{4} - 2 \cdot \frac{6-2\sqrt{5}}{4n}i + \frac{6-2\sqrt{5}}{4n^2}i^2 \\ g(x_i) &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{2\sqrt{5}-6}{2n}i + \frac{3-\sqrt{5}}{2n^2}i^2\end{aligned}$$

As somas de Riemann são dadas pela seguinte fórmula:

$$ÉMaiúsculaA = \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x - \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot \Delta x \right)$$

Dada a extensividade das somas, entende-se fazê-las parcialmente:

$$\begin{aligned}MaiúsculaA_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2n}i + 1 \right) \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2n} \right] \\ É &= \frac{4\sqrt{5}-8+3-\sqrt{5}}{4} \\ InferiorA_1 &= \frac{3\sqrt{5}-5}{4}\end{aligned}$$

$$A_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{2\sqrt{5}-6}{2n}i + \frac{3-\sqrt{5}}{2n^2}i^2 \right) \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2n} \right]$$

$$InferiorA_2 = \frac{16-8\sqrt{5}}{8} + \frac{4\sqrt{5}-8}{12} = \frac{\sqrt{5}-2}{3}$$

Portanto, estabelece-se a diferença entre as duas somas de Riemann para se obter a

soma resultante:

$$A = A_1 - A_2 = \frac{3\sqrt{5} - 5}{4} - \frac{\sqrt{5} - 2}{3} = \frac{5\sqrt{5} - 7}{12}u^2$$

Pela integração, tem-se:

$$A = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^0 (x + 1 - x^2) dx = -\frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{8} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - 3\sqrt{5} + 15 - 5\sqrt{5}}{24}$$

$$= \frac{5\sqrt{5} - 7}{12}u^2 (\text{unidades de área})$$

, numerador , raiz quadrada de 5 menos 1, fim de numerador , sobre 2, do intervalo $\left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ tem-se:

, x , fim de base , inferior à linha i . É igual a a . Mais i . Incremento $\Delta x = \frac{\sqrt{5}-1}{2n}$, $x_i =$

$$a + i\Delta x = \frac{\sqrt{5}-1}{2n}ih(x_i) = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2n}i = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2n}i$$

$$g(x_i) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2n}i\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2n^2}i^2 \text{ Maiúscula } B_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2n}i\right) \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2n}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

$$B_1 = \frac{3\sqrt{5}-5}{4}$$

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$B_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{5}-1}{2n} - \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{5}-1}{4n^2}i \right] = \frac{\sqrt{5}-2}{3}$$

$$B = B_1 - B_2 = \frac{3\sqrt{5}-5}{4} - \frac{\sqrt{5}-2}{3} = \frac{9\sqrt{5}-15-4\sqrt{5}+8}{12}$$

$$B = B_1 - B_2 = \frac{5\sqrt{5}-7}{12}u^2(\text{unidades de área}).$$

Pelo processo de integração, uma vez que se pretende confirmar o resultado obtido vem:

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} (1-x-x^2) dx = \left[\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right]_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \\ B &= \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} (1-x-x^2) dx = \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{5-2\sqrt{5}+1}{8} - \frac{5\sqrt{5}-15+3\sqrt{5}-1}{24} \\ B &= \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} (1-x-x^2) dx = \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{5}-2}{3} \\ B &= \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} (1-x-x^2) dx = \frac{6\sqrt{5}-6-9+3\sqrt{5}-4\sqrt{5}+8}{12} \end{aligned}$$

Maiúscula B é igual a integral de 0 a numerador, raiz quadrada de 5 menos 1 fim de numerador

$$\int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} (1-x-x^2) dx = \frac{5\sqrt{5}-7}{12}u^2(\text{unidades de área}).$$

Portanto, tendo em conta a fragmentação que havia sido feita, uma vez que se realizou somas parciais de Riemann, agora recorre-se ao intervalo inicial para garantir a soma total e daí vem:

$$S = A + B = \frac{5\sqrt{5}-7}{12}u^2 + \frac{5\sqrt{5}-7}{12}u^2 = \frac{5\sqrt{5}-7}{6}u^2(\text{unidades de área})$$

Pela integração vem:

$$\begin{aligned} A + B &= \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^0 (x+1-x^2) dx + \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} (1-x-x^2) dx = 2 \frac{5\sqrt{5}-7}{12}u^2 \\ A + B &= \frac{5\sqrt{5}-7}{6}u^2(\text{unidades de área}). \end{aligned}$$

Considerações finais

No nosso estudo, constatamos que os conteúdos sobre as Somas de Riemann não têm sido ministrados por não constarem dos conteúdos programáticos das cadeiras de Análise Matemática I e II. Esta carência agrava as dificuldades dos estudantes dos 1^{os} anos dos cursos de Ensino de; Matemática, Física, Informática-Educativa e de Química, pois que os mesmos revelam situações de nunca terem abordado em unidades curriculares afins.

O tratamento das somas de Riemann pressupõe a abordagem geral de séries, fundamentais na obtenção do termo geral da soma de elementos de uma determinada sucessão.

A abordagem de séries implica o domínio sobre várias áreas: sucessões; aritmética, geométrica e geométrico-aritmética, entre outras.

A abordagem de séries manifestou, principalmente, a soma de termos aritméticos, geométricos, a soma de quadrados, a soma de cubos e a soma de potências de expoente 4, bem como os seus respectivos termos gerais das somas de n primeiros termos, que consideramos como parte fundamental para o asseguramento dos conhecimentos necessários para o desenvolvimento das competências dos futuros professores de ciências exactas.

Referências Bibliográficas

- Demidovitch, B. (1977) Problemas e Exercícios de Análise Matemática - Editora Escolar, tradução para português: Escolar Editora, editora MIR
- Cardoso, D., M., Szymański, J., Rostami, M. (2009) Matemática Discreta: Combinatória, Teoria dos Grafos, Algoritmos, Editora Escolar
- Flemming, D.M. & Gonçalves, M.B. (2012) Cálculo A, funções, limite, derivação e integração (6ª ed.), REVISTA E AMPLIADA.
- Leithold, L. (1994) O Cálculo com Geometria Analítica. (3ª ed.) -Volume1. Haarbra.
- Domingos, J. T. J. (2019) Apontamentos de Didáctica da Matemática, 2º Ano de Matemática, ISCED/HUILA-LUBANGO, caixa Postal:230.
- Nolasco, B. B. S. (2019). Apontamentos de Matemática II. 2º Ano de Física e Química, ISCED/HUILA-LUBANGO, caixa Postal:230.

Recebido:20/08/2020

Aceite:24/06/2026



[Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). Ao submeter o manuscrito o autor está ciente de que os direitos de autor passam para a **REVISTA CIENTÍFICA DO ISCED - Huíla** e para o Instituto Superior de Ciências de Educação da Huíla, que mantém com fundos próprios a Revista.